MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 3
02.11.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“ — Lösungsvorschlag —

19. a) Es ist

$$g(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 = \frac{(-5) - 7}{3 - (-1)} \cdot (x - (-1)) + 7 = -3\,x + 4$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Da p dieselbe Steigung $m_p = m_g = -3$ wie g besitzt, erhält man

$$p(x) = m_p \cdot (x - x_3) + y_3 = -3 \cdot (x - 1) - 1 = -3\,x + 2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Es ist

$$h(x) = m_h \cdot (x - x_4) + y_4 = 2 \cdot (x - (-1)) - 3 = 2\,x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Für den Schnittpunkt $S = (x_S, y_S)$ gilt

$$y_S = g(x_S) = -3\,x_S + 4 \qquad \text{und} \qquad y_S = h(x_S) = 2\,x_S - 1$$

und damit $-3\,x_S + 4 = 2\,x_S - 1$, folglich $x_S = 1$ und $y_S = 1$. Für den Schnittwinkel α ergibt sich

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_g - m_h}{1 + m_g \cdot m_h}\right| = \left|\frac{(-3) - 2}{1 + (-3) \cdot 2}\right| = 1$$

und damit $\alpha = 45°$.

e) Für die Steigung m_ℓ der Lotgeraden ℓ gilt

$$m_\ell = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3},$$

weswegen sich

$$\ell(x) = m_\ell \cdot (x - x_5) + y_5 = \frac{1}{3} \cdot (x - (-3)) + 3 = \frac{1}{3}\,x + 4$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt. Für den Lotfußpunkt $L = (x_L, y_L)$ gilt

$$y_L = g(x_L) = -3\,x_L + 4 \qquad \text{und} \qquad y_S = \ell(x_S) = \frac{1}{3}\,x_L + 4$$

und damit $-3\,x_L + 4 = \frac{1}{3}\,x_L + 4$, folglich $x_L = 0$ und $y_L = 4$.

f) Für die Steigung m der gesuchten Geraden f gilt

$$\left|\frac{m - m_p}{1 + m \cdot m_p}\right| = \tan\beta, \qquad \text{also} \qquad \left|\frac{m+3}{1-3\,m}\right| = \frac{1}{2},$$

womit zwei Fälle zu unterscheiden sind:

- Im Falle

$$\frac{m+3}{1-3\,m} = \frac{1}{2}$$

ergibt sich $2\,(m + 3) = 1 - 3\,m$, also $2\,m + 6 = 1 - 3\,m$, und damit $5\,m = -5$, also $m = -1$; folglich ist

$$f(x) = m\,(x - x_3) + y_3 = -1 \cdot (x - 1) - 1 = -x.$$

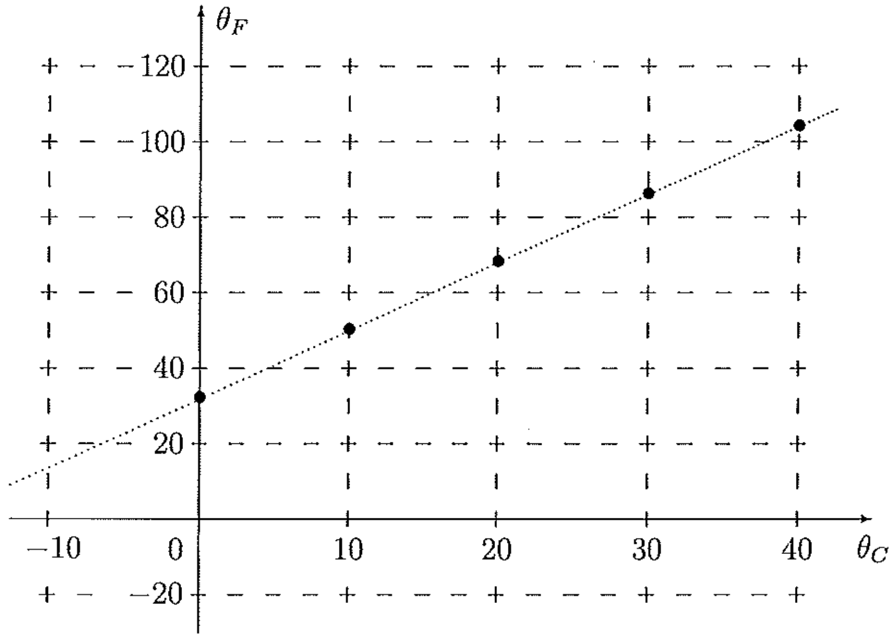
- Im Falle

$$\frac{m+3}{1-3\,m} = -\frac{1}{2}$$

ergibt sich $2\,(m+3) = -(1-3\,m)$, also $2\,m + 6 = -1 + 3\,m$, und damit $-m = -7$, also $m = 7$; folglich ist

$$f(x) = m\,(x - x_3) + y_3 = 7 \cdot (x - 1)) - 1 = 7\,x - 8.$$

20. a)



Die fünf als Punkte in das Diagramm eingezeichneten Wertepaare $(\theta_{C,i}; \theta_{F,i})$ liegen auf einer Geraden; daher ist θ_F eine lineare Funktion von θ_C.

b) Mit zwei beliebigen Wertepaaren $(\theta_{C,1}; \theta_{F,1})$ und $(\theta_{C,2}; \theta_{F,2})$ gilt

$$\theta_F = \frac{\theta_{F,2} - \theta_{F,1}}{\theta_{C,2} - \theta_{C,1}}\,(\theta_C - \theta_{C,1}) + \theta_{F,1},$$

woraus man (etwa mit den beiden äußeren Wertepaaren)

$$\theta_F = \frac{104-32}{40-0}\,(\theta_C - 0) + 32 = \frac{9}{5}\,\theta_C + 32$$

und folglich

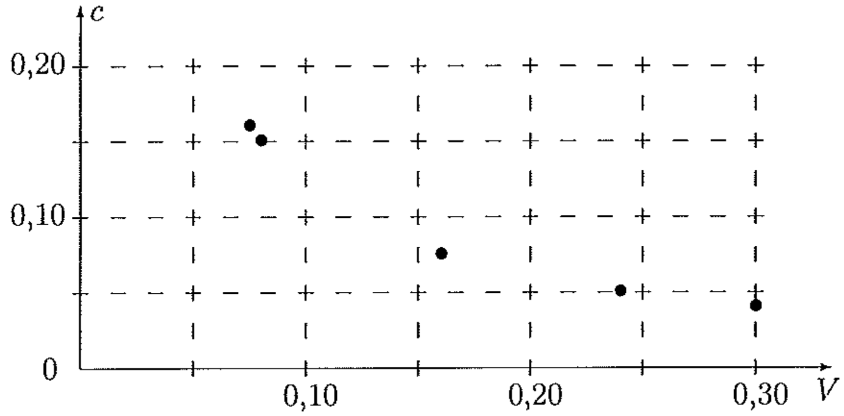
$$\frac{9}{5}\,\theta_C = \theta_F - 32 \quad \text{und} \quad \theta_C = \frac{5}{9}\,(\theta_F - 32)$$

erhält.

c) Für $\theta = \theta_C = \theta_F$ gilt:

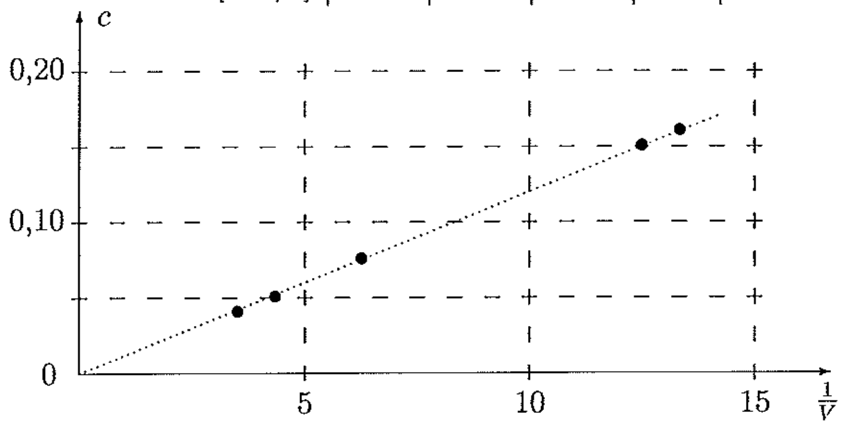
$$\theta = \frac{9}{5}\,\theta + 32 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{5}\,\theta = 32 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -40$$

21. a)



b) Für den graphischen Test auf indirekte Proportionalität wird die folgende Wertetabelle betrachtet:

$\frac{1}{V}$	$[1/\ell]$	13,33	12,50	6,25	4,17	3,33
c	$[\text{mol}/\ell]$	0,16	0,15	0,075	0,05	0,04



Die Wertepaare $(\frac{1}{V_i}, c_i)$ liegen auf einer Ursprungsgerade. Damit sind $\frac{1}{V}$ und c direkt proportional, also V und c indirekt proportional; folglich ist das Produkt $V \cdot c$ konstant und berechnet sich mit Hilfe eines beliebigen Wertepaares zu $V \cdot c = 0{,}300 \cdot 0{,}04 = 0{,}012$ [mol]. Es gilt also $c = \frac{0{,}012}{V}$.

Es sei angemerkt, daß man mit dem gleichen Ergebnis auch die Wertepaare $(V_i, \frac{1}{c_i})$ betrachten kann.

c) Die Stoffmenge $n = c \cdot V$ blieb stets konstant bei 12 mmol; es wurde jedes Mal nur Wasser hinzugefügt.

22. a) Für die Nullstellen x_1 und x_2 gilt

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-15)}) = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{64}) = \frac{1}{2}(-2 \pm 8)$$

also $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$; ferner gilt für den Scheitelpunkt $S_p = (x_S; y_S)$

$$x_S = -\frac{2}{2} = -1 \text{ und damit } y_S = p(x_S) = (-1)^2 + 2(-1) - 15 = -16$$

Es sei angemerkt, daß sich x_S auch als Mittelpunkt der beiden Nullstellen x_1 und x_2 berechnen läßt.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$q(x) = a\,(x - x_S)^2 + y_S = a\,(x - 6)^2 + 13$$

mit

$$-3 = q(2) = a\,(2 - 6)^2 + 13 = 16\,a + 13,$$

also $a = -1$. Damit erhalten wir

$$q(x) = -(x - 6)^2 + 13 = -x^2 + 12\,x - 23$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Für einen Schnittpunkt $S = (x, y)$ von p und q gilt

$$\begin{aligned} p(x) = q(x) \quad &\Rightarrow \quad x^2 + 2\,x - 15 = -x^2 + 12\,x - 23 \\ &\Rightarrow \quad 2\,x^2 - 10\,x + 8 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 - 5\,x + 4 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1}{2}\,(5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}) = \frac{1}{2}\,(5 \pm 3) \\ &\Rightarrow \quad x_1 = 1 \ \text{ und } \ x_2 = 4 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich $S_1 = (1, -12)$ und $S_2 = (4, 9)$.

d) Es gilt

$$g(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1 = \frac{9 - (-12)}{4 - 1}\,(x - 1) - 12 = 7\,x - 19$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

e) Es gilt

$$r(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = a\,(x - 2)\,(x - 4)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für den Scheitelpunkt $S_r = (x_S; y_S)$ gilt aus Symmetriegründen

$$x_S = \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\,(2 + 4) = 3 \quad \text{und damit} \qquad y_S = g(x_S) = 2$$

Es folgt also

$$2 = y_S = r(x_S) = a\,(3-2)\,(3-4) = -a, \quad \text{also } a = -2$$

und damit

$$r(x) = -2\,(x-2)\,(x-4) = -2\,x^2 + 12\,x - 16$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

23. a) Es gilt

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1 = \frac{3-1}{7-3}\,(x-3) + 1 = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Unter Verwendung der Funktionsgleichung von f gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\,y = x - 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 2\,y + 1 \end{aligned}$$

und damit $f^{-1}(y) = 2\,y + 1$. Nennt man nun die freie Variable wieder x, so ergibt sich $f^{-1}(x) = 2\,x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zum anderen erhält man mit Hilfe der beiden Punkte

$$f^{-1}(x) = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\,(x - x_3) + y_3 = \frac{7-3}{3-1}\,(x-1) + 3 = 2\,x + 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Für den Schnittpunkt $S = (x_S, y_S)$ gilt

$$y_S = f(x_S) = \frac{1}{2}\,x_S - \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad y_S = f^{-1}(x_S) = 2\,x + 1$$

und damit $\frac{1}{2}\,x_S - \frac{1}{2} = 2\,x + 1$; wegen $-\frac{3}{2}\,x_S = \frac{3}{2}$ ergibt sich $x_S = -1$ und $y_S = -1$. Für den Schnittwinkel α ergibt sich

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_f - m_{f^{-1}}}{1 + m_f \cdot m_{f^{-1}}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{1}{2}\cdot 2}\right| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

und damit $\alpha \approx 37°$.

24. a) Für den Scheitelpunkt $S = (x_S; y_S)$ gilt

$$x_S = -\frac{8}{2\cdot(-2)} = 2 \quad \text{und damit} \quad y_S = f(x_S) = 14.$$

Da der Graph G_f eine nach unten geöffnete Parabel ist, erhält man für den Wertebereich W_f von f die Beziehung $W_f =]-\infty, 14]$.

b) Der Graph G_f ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = x_S = 2$.

c) Gemäß b) ist f auf $D_1 =]-\infty, 2]$ wie auf $D_2 = [2, \infty[$ jeweils umkehrbar; die Wertebereiche der Einschränkungen $f_1 = f|_{D_1}$ und $f_2 = f|_{D_2}$ stimmen mit $W_f =]-\infty, 14]$ überein. Für $y \in W_f$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad -2\,x^2 + 8\,x + 6 = y \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\,x^2 - 8\,x + (y-6) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1}{4}\,(8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y-6)}) \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7 - \frac{y}{2}} \end{aligned}$$

Wegen $W(f_1^{-1}) = D_1 =]-\infty, 2]$ gilt

$$f_1^{-1} :]-\infty, 14] \to \mathbb{R}, \quad f_1^{-1}(y) = 2 - \sqrt{7 - \frac{y}{2}}$$

und wegen $W(f_2^{-1}) = D_2 = [2, \infty[$ gilt

$$f_2^{-1} :]-\infty, 14] \to \mathbb{R}, \quad f_2^{-1}(y) = 2 + \sqrt{7 - \frac{y}{2}}$$

25. a) Man erhält die folgende Wertetabelle:

t [h]	0	6	12	18	24
c [g/ℓ]	1,30	1,11	0,83	0,63	0,50

b) Für alle $t_1,\ t_2 \in [0, 24]$ gilt:

$$\begin{aligned} &t_1 < t_2 \Rightarrow t_1^2 < t_2^2 \Rightarrow 100 + t_1^2 < 100 + t_2^2 \\ &\quad \Rightarrow \sqrt{100 + t_1^2} < \sqrt{100 + t_2^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{100 + t_1^2}} > \frac{1}{\sqrt{100 + t_2^2}} \\ &\quad \Rightarrow \frac{13}{\sqrt{100 + t_1^2}} > \frac{13}{\sqrt{100 + t_2^2}} \Rightarrow f(t_1) > f(t_2) \end{aligned}$$

Damit ist f streng monoton fallend; damit fällt also die Konzentration c im Laufe des Experiments streng monoton. Für den Wertebereich W_f gilt also

$$W_f = [f(24), f(0)] = [0{,}50; 1{,}30]$$

c) Für alle $c \in [0{,}50; 1{,}30]$ gilt:

$$\begin{aligned} c = f(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad c = \frac{13}{\sqrt{100 + t^2}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{100 + t^2} = \frac{13}{c} \\ &\Longleftrightarrow \quad 100 + t^2 = \frac{169}{c^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad t^2 = \frac{169}{c^2} - 100 \\ &\Longleftrightarrow \quad t = \frac{1}{c}\sqrt{169 - 100\,c^2} \end{aligned}$$

Es gilt also $f^{-1}(c) = \frac{1}{c}\sqrt{169 - 100\,c^2}$ für alle $c \in [0{,}50; 1{,}30]$. Es bezeichnet $f^{-1}(c)$ den Zeitpunkt t des Experiments, zu dem die Konzentration der Substanz A genau c beträgt.

d) Wegen $f^{-1}(1,0) = 8{,}31$ und $f^{-1}(0,8) = 12{,}81$ liegt die Konzentration im Zeitraum von 8 Stunden 19 Minuten bis 12 Stunden 49 Minuten nach Versuchsbeginn im Bereich zwischen 1,0 g/ℓ und 0,8 g/ℓ.