MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 2
26.10.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten"
— Lösungsvorschlag —

10. a) Es ist
$$\Delta T = E \cdot \frac{n}{m}$$

b) Es ist
$$E = \frac{\Delta T \cdot m}{n} = \frac{7{,}5 \text{ K} \cdot 620 \text{ g}}{2{,}5 \text{ mol}} = 1{,}86 \text{ K kg mol}^{-1}$$

c) Um den Schmelzpunkt weiter abzusenken, muß man der Lösung zusätzlich weitere Substanz zugeben; es gilt
$$n = \frac{\Delta T \cdot m}{E} = \frac{10{,}2 \text{ K} \cdot 620 \text{ g}}{1{,}86 \text{ K kg mol}^{-1}} = 3{,}4 \text{ mol}$$
Es müssen also 3,4 mol − 2,5 mol = 0,9 mol Substanz zugegeben werden.

11. a) Es ist
$$\Delta T = k \cdot \frac{E}{m}$$
mit der Proportionalitätskonstanten k; mit der Konstanten $c = \frac{1}{k}$ folgt aber daraus
$$E = \frac{1}{k} \cdot m \cdot \Delta T = c \cdot m \cdot \Delta T.$$

b) Bei einer um 40 % größeren Masse $m_1 = (1 + \frac{40}{100}) \cdot m = 1{,}4 \cdot m$ und eine um 40 % geringeren Temperaturerhöhung $\Delta T_1 = (1 - \frac{40}{100}) \cdot \Delta T = 0{,}6 \cdot \Delta T$ ergibt sich für den Energiebedarf
$$E_1 = c \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 = c \cdot (1{,}4 \cdot m) \cdot (0{,}6 \cdot \Delta T) = \\ = 0{,}84 \cdot (c \cdot m \cdot \Delta T) = (1 - \frac{16}{100}) \cdot E;$$
der Energiebedarf sinkt also um 16 %.

c) Es ist $\Delta T = (39{,}2 - 22{,}5)$ K $= 16{,}7$ K und damit
$$c = \frac{E}{m \cdot \Delta T} = \frac{17{,}5 \text{ kJ}}{250 \text{ g} \cdot 16{,}7 \text{ K}} = 4{,}19 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

12. a) Die Größe a ist

- direkt proportional zur Größe b (bei festem c) und
- indirekt proprotional zur Größe c, also direkt proportional zur Größe $\frac{1}{c}$ (bei festem b);

damit gilt

$$a = \lambda \cdot b \cdot \frac{1}{c} = \frac{\lambda\, b}{c}$$

mit einer gemeinsamen Proportionalitätskonstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich, daß bei festem a

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{\lambda} = \text{const.}$$

die Größen b und c quotientengleich, also direkt proportional sind.

b) Die als indirekt proportional vorausgesetzten Größen u und v sind produktgleich, es ist also $u_1 \cdot v_1 = u_2 \cdot v_2$. Steigt u um 25 %, so ist

$$u_2 = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \cdot u_1 = 1{,}25\, u_1,$$

und wir erhalten

$$v_2 = \frac{u_1}{u_2} \cdot v_1 = \frac{u_1}{1{,}25\, u_1} \cdot v_1 = 0{,}80\, v_1 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot v_1;$$

damit fällt v um 20 %.

c) Die als direkt proportional vorausgesetzten Größen x und y^2 sind quotientengleich, es ist also $\frac{y_1^2}{x_1} = \frac{y_2^2}{x_2}$. Sinkt x um 36 %, so ist

$$x_2 = \left(1 - \frac{36}{100}\right) \cdot x_1 = 0{,}64\, x_1,$$

und wir erhalten

$$y_2^2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot y_1^2 = \frac{0{,}64\, x_1}{x_1} \cdot y_1^2 = 0{,}64\, y_1^2,$$

also

$$y_2 = \sqrt{0{,}64}\, y_1 = 0{,}80\, y_1 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot y_1;$$

damit fällt y um 20 %.

13. a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{(x^2\, y^{-3}\, z)^{-4} : (x^{-1}\, y^2\, z^{-3})^2}{(x^{-3}\, y\, z^2)^{-3} \cdot (x^{-4}\, y^3\, z^2)^4} = \\
&\qquad (x^2\, y^{-3}\, z)^{-4} \cdot (x^{-1}\, y^2\, z^{-3})^{-2} \cdot (x^{-3}\, y\, z^2)^3 \cdot (x^{-4}\, y^3\, z^2)^{-4} = \\
&\qquad\qquad x^{-8}\, y^{12}\, z^{-4} \cdot x^2\, y^{-4}\, z^6 \cdot x^{-9}\, y^3\, z^6 \cdot x^{16}\, y^{-12}\, z^{-8} = x\, y^{-1} = \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{y})^5\cdot(\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y})^{-4}} = (x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{1}{4}})^{-5}\cdot(x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{3}})^4 =$$

$$x^{-\frac{5}{3}}\,y^{-\frac{5}{4}}\cdot x^2\,y^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{1}{12}} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[12]{y}$$

c) Mit der Substitution $t = x^3$ erhält man die Gleichung $t^2 + 7t - 8 = 0$ und damit

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}\,(-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot(-8)}) = \frac{1}{2}\,(-7 \pm 9)$$

also $t_1 = -8$ und $t_2 = 1$. Demnach erhalten wir $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$; durch Einsetzen bestätigt man, daß es sich jeweils um Lösungen der Gleichung handelt. Es ist also $\mathbb{L} = \{-2, 1\}$.

d) Mit der Substitution $t = x^{-\frac{3}{2}}$ erhält man die Gleichung $t^2 - 120\,t - 625 = 0$ und damit

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}\,(120 \pm \sqrt{(-120)^2 - 4\cdot(-625)}) = \frac{1}{2}\,(120 \pm 130)$$

also $t_1 = -5$ und $t_2 = 125$. Wegen $t = x^{-\frac{3}{2}} > 0$ liefert $t_1 = -5$ keine Lösung x_1; dagegen ergibt sich für $t_2 = 125$ die Lösung $x_2 = \frac{1}{25}$. Wir erhalten also insgesamt $\mathbb{L} = \{\frac{1}{25}\}$ (Probe!).

14. a) Wegen $64 = 8^2$ ist $\log_8 64 = 2$; ein alternativer Lösungsweg ist

$$\log_8 64 = \frac{\mathrm{lb}\,64}{\mathrm{lb}\,8} = \frac{\mathrm{lb}\,2^6}{\mathrm{lb}\,2^3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Wegen $64 = 4^3$ ist $\log_4 64 = 3$; ein alternativer Lösungsweg ist

$$\log_4 64 = \frac{\mathrm{lb}\,64}{\mathrm{lb}\,4} = \frac{\mathrm{lb}\,2^6}{\mathrm{lb}\,2^2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Wegen $64 = 2^6$ ist $\log_2 64 = 6$; ein alternativer Lösungsweg ist

$$\log_2 64 = \frac{\mathrm{lb}\,64}{\mathrm{lb}\,2} = \frac{\mathrm{lb}\,2^6}{\mathrm{lb}\,2^1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Wegen $64 = \sqrt{2}^{12}$ ist $\log_{\sqrt{2}} 64 = 12$; ein alternativer Lösungsweg ist

$$\log_{\sqrt{2}} 64 = \frac{\mathrm{lb}\,64}{\mathrm{lb}\,\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{lb}\,2^6}{\mathrm{lb}\,2^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12.$$

Wegen $64 = (\frac{1}{2})^{-6}$ ist $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$; ein alternativer Lösungsweg ist

$$\log_{\frac{1}{2}} 64 = \frac{\mathrm{lb}\,64}{\mathrm{lb}\,\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{lb}\,2^6}{\mathrm{lb}\,2^{-1}} = \frac{6}{-1} = -6.$$

b) Aus $\log_3 y = 4$ folgt $y = 3^4 = 81$.
Aus $\log_{\frac{1}{3}} y = 3$ folgt $y = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$.
Aus $\log_{\sqrt{3}} y = -2$ folgt $y = \sqrt{3}^{-2} = \frac{1}{3}$.

c) Aus $\log_a 25 = 2$ folgt $25 = a^2$, also $a = 5$.
Aus $\log_a 25 = -2$ folgt $25 = a^{-2}$, also $a = \frac{1}{5}$.
Aus $\log_a 25 = 6$ folgt $25 = a^6$, also $a = \sqrt[3]{5}$.

15. a) Es ist

$$\begin{aligned} &\lg(x-2) + \lg(x+1) = 1 \;\Rightarrow\; \lg[(x-2)(x+1)] = 1 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; x^2 - x - 2 = 10 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 4 \text{ und } x_2 = -3 \end{aligned}$$

Wegen $x - 2 > 0$ kann $x_2 = -3$ keine Lösung der Gleichung sein; dagegen ist $x_1 = 4$ wegen $\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$ Lösung der Gleichung. Damit gilt $\mathbb{L} = \{4\}$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{lb}(x-7) + \mathrm{lb}(x-5) = 3 \;\Rightarrow\; \mathrm{lb}[(x-7)(x-5)] = 3 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; x^2 - 12x + 35 = 8 \;\Rightarrow\; x^2 - 12x + 27 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 3 \text{ und } x_2 = 9 \end{aligned}$$

Wegen $x - 7 > 0$ kann $x_1 = 3$ keine Lösung der Gleichung sein; dagegen ist $x_2 = 9$ wegen $\mathrm{lb}\, 2 + \mathrm{lb}\, 4 = 1 + 2 = 3$ Lösung der Gleichung. Damit gilt $\mathbb{L} = \{9\}$.

c) Es ist

$$\begin{aligned} &\ln\frac{x+4}{x-2} - \ln\frac{x-3}{x+1} = 2\ln 3 \Rightarrow \ln\frac{(x+4)\,(x+1)}{(x-2)\,(x-3)} = \ln 9 \Rightarrow \\ &\frac{(x+4)\,(x+1)}{(x-2)\,(x-3)} = 9 \Rightarrow x^2 + 5\,x + 4 = 9\left(x^2 - 5\,x + 6\right) \Rightarrow \\ &8\,x^2 - 50\,x + 50 = 0 \Rightarrow 4\,x^2 - 25\,x + 25 = 0 \Rightarrow \\ &x = \frac{1}{2\cdot 4}\left(-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\cdot 4\cdot 25}\right) = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{25 \pm 15}{8} \end{aligned}$$

Damit ist $x_1 = 5$ oder $x_2 = \frac{5}{4}$; wegen

$$\ln\frac{x_1+4}{x_1-2} - \ln\frac{x_1-3}{x_1+1} = \ln\frac{5+4}{5-2} - \ln\frac{5-3}{5+1} = \ln 3 - \underbrace{\ln\frac{1}{3}}_{=-\ln 3} = 2\ln 3$$

ist $x_1 = 5$ eine Lösung der gegebenen Gleichung, und wegen

$$\frac{x_2+4}{x_2-2} = \frac{\frac{5}{4}+4}{\frac{5}{4}-2} = -7 < 0$$

ist $x_2 = \frac{5}{4}$ nicht in der Definitionsmenge und damit insbesondere keine Lösung der Gleichung. Es ist also $L = \{5\}$.

b) Aus $\log_3 y = 4$ folgt $y = 3^4 = 81$.
Aus $\log_{\frac{1}{3}} y = 3$ folgt $y = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$.
Aus $\log_{\sqrt{3}} y = -2$ folgt $y = \sqrt{3}^{-2} = \frac{1}{3}$.

c) Aus $\log_a 25 = 2$ folgt $25 = a^2$, also $a = 5$.
Aus $\log_a 25 = -2$ folgt $25 = a^{-2}$, also $a = \frac{1}{5}$.
Aus $\log_a 25 = 6$ folgt $25 = a^6$, also $a = \sqrt[3]{5}$.

15. a) Es ist

$$\begin{aligned} &\lg(x-2) + \lg(x+1) = 1 \;\Rightarrow\; \lg[(x-2)(x+1)] = 1 \;\Rightarrow \\ &\quad\Rightarrow\; x^2 - x - 2 = 10 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 4 \text{ und } x_2 = -3 \end{aligned}$$

Wegen $x - 2 > 0$ kann $x_2 = -3$ keine Lösung der Gleichung sein; dagegen ist $x_1 = 4$ wegen $\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$ Lösung der Gleichung. Damit gilt $\mathbb{L} = \{4\}$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{lb}(x-7) + \mathrm{lb}(x-5) = 3 \;\Rightarrow\; \mathrm{lb}[(x-7)(x-5)] = 3 \;\Rightarrow \\ &\quad\Rightarrow\; x^2 - 12x + 35 = 8 \;\Rightarrow\; x^2 - 12x + 27 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 3 \text{ und } x_2 = 9 \end{aligned}$$

Wegen $x - 7 > 0$ kann $x_1 = 3$ keine Lösung der Gleichung sein; dagegen ist $x_2 = 9$ wegen $\mathrm{lb}\, 2 + \mathrm{lb}\, 4 = 1 + 2 = 3$ Lösung der Gleichung. Damit gilt $\mathbb{L} = \{9\}$.

c) Es ist

$$\begin{aligned} &\ln\frac{x+4}{x-2} - \ln\frac{x-3}{x+1} = 2\ln 3 \Rightarrow \ln\frac{(x+4)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = \ln 9 \Rightarrow \\ &\frac{(x+4)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = 9 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 9\left(x^2 - 5x + 6\right) \Rightarrow \\ &8x^2 - 50x + 50 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 25x + 25 = 0 \Rightarrow \\ &x = \frac{1}{2\cdot 4}\left(-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\cdot 4\cdot 25}\right) = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{25 \pm 15}{8} \end{aligned}$$

Damit ist $x_1 = 5$ oder $x_2 = \frac{5}{4}$; wegen

$$\ln\frac{x_1+4}{x_1-2} - \ln\frac{x_1-3}{x_1+1} = \ln\frac{5+4}{5-2} - \ln\frac{5-3}{5+1} = \ln 3 - \underbrace{\ln\frac{1}{3}}_{=-\ln 3} = 2\ln 3$$

ist $x_1 = 5$ eine Lösung der gegebenen Gleichung, und wegen

$$\frac{x_2+4}{x_2-2} = \frac{\frac{5}{4}+4}{\frac{5}{4}-2} = -7 < 0$$

ist $x_2 = \frac{5}{4}$ nicht in der Definitionsmenge und damit insbesondere keine Lösung der Gleichung. Es ist also $L = \{5\}$.

16. a) Mit $C_B = 76$ gilt

$$76 = 60 \cdot \lg C_L - 20 \;\Rightarrow\; \lg C_L = \frac{76+20}{60} = 1,6 \;\Rightarrow\; C_L = 10^{1,6} = 40$$

Der durchschnittliche Bleigehalt der Luft beträgt 40 μg/m^3.

b) Nach Halbierung des Bleigehalts der Luft auf $C_L^* = 20$ ist

$$C_B^* = 60 \cdot \lg C_L^* - 20 = 60 \cdot \lg 20 - 20 = 58;$$

damit ergibt sich als absolute Abnahme des Bleigehalts im Blut

$$C_B - C_B^* = 76 - 58 = 18$$

sowie als relative Abnahme des Bleigehalts im Blut

$$\frac{C_B - C_B^*}{C_B} = \frac{18}{76} = 23{,}7\ \%.$$

17. a) Es ist

$$S = \left(1 - \frac{0{,}5}{100}\right)^{365} \cdot S_0 = 0{,}995^{365} \cdot S_0 \approx 0{,}160 \cdot S_0 = \left(1 - \frac{84{,}0}{100}\right) \cdot S_0;$$

die Strahlung hat sich um 84,0 % verringert.

b) Es ist

$$B = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{24} \cdot B_0 = 4 \cdot B_0$$

und damit

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{24} = 4, \qquad \text{also} \qquad p = \left(\sqrt[24]{4} - 1\right) \cdot 100 \approx 5{,}95$$

c) Es ist

$$c = \left(1 - \frac{2{,}5}{100}\right)^{n} \cdot c_0 \le \frac{10}{100} \cdot c_0$$

und damit

$$0{,}975^n \le 0{,}1 \;\Rightarrow\; n \cdot \ln 0{,}975 \le \ln 0{,}1 \;\Rightarrow\; n \ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}975} \approx 90{,}94$$

Es ist also $n = 91$.

18. Für die Konzentration c_n des Stoffes A nach einer Versuchsdauer von n Minuten gilt

$$c_n = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{n} \cdot c_0$$

mit der Konzentration $c_0 = 500$ g/ℓ des Stoffes A zu Beginn des Experiments.

a) Für $n = 60$ ist $c_{60} = 228$ g/ℓ; man erhält

$$228 \text{ g}/\ell = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{60} \cdot 500 \text{ g}/\ell$$

und damit

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^{60} = \frac{228 \text{ g}/\ell}{500 \text{ g}/\ell} = 0{,}456, \quad \text{also} \quad p = \left(1 - \sqrt[60]{0{,}456}\right) \cdot 100 \approx 1{,}30$$

b) Es ist

$$c_{90} = \left(1 - \frac{1{,}30}{100}\right)^{90} \cdot c_0 = 0{,}987^{90} \cdot 500 \text{ g}/\ell \approx 154 \text{ g}/\ell$$

c) Für n mit $c_n = \frac{1}{10} c_0$ gilt

$$\frac{1}{10} c_0 = c_n = \left(1 - \frac{1{,}30}{100}\right)^{n} \cdot c_0$$

und damit

$$0{,}987^n = 0{,}10 \;\Rightarrow\; n \cdot \ln 0{,}987 = \ln 0{,}10 \;\Rightarrow\; n = \frac{\ln 0{,}10}{\ln 0{,}987} \approx 175{,}97$$

Es ist also $n \approx 176$; die Konzentration beträgt nach 2 Stunden 56 Minuten nur noch ein Zehntel von c_0.

Obligatorisch ist, daß Sie sich bis zum 29. Oktober 2010 registrieren, auf

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/uebungen/anmeldung/index.html`

Alternativ folgen Sie dem Verweis "Obligatorische Online-Registrierung" auf

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~pschust/vorlsem/pharm/pharm.html`