MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. Erwin Schörner

SS 2010
Blatt 1
20.04.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten"
— Lösungsvorschlag —

1. a) Wird ein Preis von 100 € um 20 % erhöht, so steigt er um $\frac{20}{100} \cdot 100€ = 20€$ auf 120 € . Wird dieser danach um 20 % gesenkt, so fällt er um $\frac{20}{100} \cdot 120€ = 24€$ auf 96 € . Insgesamt ist der Preis also um 4 € , also um $\frac{4€}{100€} \cdot 100 = 4$ Prozent des ursprünglichen Preises gefallen.

   b) Bezeichnet G_0 den ursprünglichen Preis, so ergibt sich

$$\left(G_0 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0{,}96\, G_0 \qquad \text{nach Modell a)}$$

$$\left(G_0 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 0{,}96\, G_0 \qquad \text{nach Modell b)}$$

   Die Ergebnisse stimmen aufgrund der Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation der reellen Zahlen überein.

   c) Zum einen gilt

$$\left(G_0 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = G_0 \iff$$
$$\iff 1,2 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1 \iff p = \left(1 - \frac{1}{1,2}\right) \cdot 100 = 16{,}7$$

   Der Preis muß um 16,7 % gesenkt werden.
   Zum anderen gilt

$$\left(G_0 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right) = G_0 \iff$$
$$\iff 0{,}8 \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right) = 1 \iff p = \left(\frac{1}{0{,}8} - 1\right) \cdot 100 = 25$$

   Der Preis muß um 25 % erhöht werden.

2. Der Nettopreis G_0 erhöht sich bei einem Mehrwertsteuersatz von m % um die Mehrwertsteuer $M = \frac{m}{100} \cdot G_0$ auf den Gesamtpreis $G = G_0 + M = \left(1 + \frac{m}{100}\right) \cdot G_0$.

a) Für den Anteil p der Mehrwertsteuer am Gesamtpreis gilt

$$p = \frac{M}{G} \cdot 100 = \frac{\frac{m}{100} \cdot G_0}{(1 + \frac{m}{100}) \cdot G_0} \cdot 100 = \frac{100\,m}{100 + m}$$

Damit ergibt sich für $m = 7$ bzw. $m = 19$

$$p = \frac{100 \cdot 7}{100 + 7} = 6{,}54 \qquad \text{bzw.} \qquad p = \frac{100 \cdot 19}{100 + 19} = 15{,}97$$

b) Bei einer Verschiebung von Gruppe 1 in Gruppe 2 erhöht sich der Preis von 1,07 G_0 auf 1,19 G_0, also um 0,12 G_0 oder $\frac{0{,}12\,G_0}{1{,}07\,G_0} = 11{,}21$ Prozent.
Bei einer Verschiebung von Gruppe 2 in Gruppe 1 vermindert sich der Preis von 1,19 G_0 auf 1,07 G_0, also um 0,12 G_0 oder $\frac{0{,}12\,G_0}{1{,}19\,G_0} = 10{,}08$ Prozent.

3. Der Nettobezugspreis G_0 erhöht sich um den Rohgewinn $R = G_0 \cdot \frac{r}{100}$ auf den Nettoverkaufspreis

$$G_1 = G_0 + R = G_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right);$$

dementsprechend beträgt die Mehrwertsteuer $M = G_1 \cdot \frac{m}{100}$ sowie der Verkaufspreis

$$G_2 = G_1 + M = G_1 \cdot \left(1 + \frac{m}{100}\right) = G_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{m}{100}\right).$$

Für die Handesspanne s gilt schließlich

$$s = \frac{R}{G_1} \cdot 100 = \frac{G_0 \cdot \frac{r}{100}}{G_0 \cdot (1 + \frac{r}{100})} \cdot 100 = \frac{r}{1 + \frac{r}{100}}.$$

a) Es ist $G_0 = 70{,}00$ € , $r = 30$ und $m = 19$. Damit ergibt sich für den Rohgewinn $R = 21{,}00$ € , für den Verkaufspreis $G_2 = 108{,}29$ € sowie für die Handesspanne $s = 23{,}1$ Prozent.

b) Es ist $G_0 = 50{,}00$ € , $G_2 = 74{,}90$ € und $m = 7$. Damit ergibt sich zunächst für den Nettoverkaufspreis

$$G_1 = \frac{G_2}{1 + \frac{m}{100}} = \frac{74{,}90 \text{ €}}{1{,}07} = 70{,}00 \text{ €}$$

und damit für den Rohgewinn $R = G_1 - G_0 = 20{,}00$ € , für den prozentualen Zuschlag $r = \frac{R}{G_0} \cdot 100 = 40$ sowie für die Handesspanne $s = 28{,}6$ Prozent.

4. a) Der Prozentwert k wird auf den Grundwert n bezogen; der Prozentsatz des Naturalrabatts beträgt demnach $\frac{k}{n} \cdot 100$.

b) Bei einem Stückpreis S muß der Kunde für insgesamt $n + k$ Stück nur den Preis $n \cdot S$ bezahlen. Der Stückpreis beträgt nur noch $\frac{n}{n+k} \cdot S$ und sinkt demnach um $S - \frac{n}{n+k} \cdot S = \frac{k}{n+k} \cdot S$, also um $\frac{k}{n+k} \cdot 100$ Prozent.

c) Gemäß den Formeln von a) und b) ergeben sich folgende Werte:

Kondition	„10+1“	„8+2“	„7+3“	„2+1“
Naturalrabatt	10,0 %	25,0 %	42,9 %	50,0 %
Barrabatt	9,1 %	20,0 %	30,0 %	33,3 %

5. a) $L_1 : L_2 : L_3 = 2{,}4\,\ell : 3{,}6\,\ell : 6\,\ell = 2 : 3 : 5.$

   b) $A : B : C = 0{,}54$ kg $: 1{,}26$ kg $: 0{,}90$ kg $= 3 : 7 : 5.$

   c) Die Lösung besteht aus 4 Teilen von L_1, 2 Teilen von L_2 und 3 Teilen von L_3, insgesamt also aus 9 Teilen. 1 Teil entspricht demnach $\frac{0{,}72\,\ell}{9} = 0{,}08\,\ell$; man benötigt also $4 \cdot 0{,}08\,\ell = 0{,}32\,\ell$ von L_1, $2 \cdot 0{,}08\,\ell = 0{,}16\,\ell$ von L_2 und $3 \cdot 0{,}08\,\ell = 0{,}24\,\ell$ von L_3.

   d) Das Gemisch besteht aus 4 Teilen von A, 1 Teil von B und 3 Teilen von C, insgesamt also aus 8 Teilen. 1 Teil entspricht demnach $\frac{320\,\text{g}}{8} = 40$ g; man braucht also $4 \cdot 40\,\text{g} = 160$ g von A, $1 \cdot 40\,\text{g} = 40$ g von B und $3 \cdot 40\,\text{g} = 120\,\text{g}$ von C.

6. a) Das Gemisch besteht aus 5 Teilen von A, 4 Teilen von B und 7 Teilen von C, insgesamt also aus 16 Teilen. 1 Teil entspricht demnach $\frac{560\,\text{g}}{16} = 35$ g; man braucht also $a = 5 \cdot 35\,\text{g} = 175$ g von A, $b = 4 \cdot 35\,\text{g} = 140$ g von B und $c = 7 \cdot 35\,\text{g} = 245$ g von C.

   b) Für den Massenanteil y des Stoffes B am Gemisch gilt

$$y = \frac{b}{a+b+c} = \frac{140\text{ g}}{175\text{ g} + 140\text{ g} + 245\text{ g}} = 0{,}2500$$

mit

$$y_{\max} = \frac{b_{\max}}{a_{\min} + b_{\max} + c_{\min}} = \frac{142\text{ g}}{173\text{ g} + 142\text{ g} + 243\text{ g}} = 0{,}2545$$

und

$$y_{\min} = \frac{b_{\min}}{a_{\max} + b_{\min} + c_{\max}} = \frac{138\text{ g}}{177\text{ g} + 138\text{ g} + 247\text{ g}} = 0{,}2456$$

(Diese Überlegungen sind anschaulich unmittelbar einleuchtend und ergeben sich mathematisch aus der Umformung $y = \dfrac{b}{a+b+c} = \dfrac{1}{1 + \frac{a+c}{b}}$.)

   c) Werden der Rezeptur von a) zusätzlich x g des Stoffes B zugegeben, so liegen in $(560 + x)$ g Gemisch insgesamt $(140 + x)$ g des Stoffes B vor; der Massenanteil von B ist also $\dfrac{140 + x}{560 + x}$, und wir erhalten:

$$\frac{140 + x}{560 + x} = \frac{3}{10} \iff 10 \cdot (140 + x) = 3 \cdot (560 + x) \iff$$
$$\iff 1.400 + 10\,x = 1.680 + 3\,x \iff 7\,x = 280 \iff x = 40$$

Es müssen also noch 40 g des Stoffes B zugegeben werden.

7. a) Das Produkt $c \cdot V$ ist konstant, es gilt also $c_1 \cdot V_1 = c_2 \cdot V_2$.

   b) Ist V_2 um 150 % größer als V_1, so gilt $V_2 = (1 + \frac{150}{100}) \cdot V_1 = 2,5\,V_1$. Wir erhalten

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = c_1 \cdot \frac{1}{2,5} = 0,4\,c_1.$$

   Die Konzentration nimmt demnach um $c_1 - 0,4\,c_1 = 0,6\,c_1$, also um $\frac{0,6\,c_1}{c_1} =$ 60 Prozent ab.

8. a) Das Produkt $A \cdot v$ ist konstant, es gilt also $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$.

   b) Es ist

$$A_1 = 0{,}5 \text{ cm}^2 = 50 \text{ mm}^2 \qquad \text{sowie} \qquad A_2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = 3{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2$$

   Damit erhalten wir

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot v_2 \leq \frac{3{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2}{50 \text{ mm}^2} \cdot 0{,}8 \text{ m s}^{-1} = 0{,}5 \text{ mm s}^{-1}.$$

9. Es ist $c = \frac{m}{A}$ mit der Proportionalitätskonstante c.

   a) Es ist

$$m_{\text{ges}} = 500 \cdot c \cdot A = 500 \cdot 80 \text{ g/m}^2 \cdot 0{,}297 \text{ m} \cdot 0{,}210 \text{ m} \approx 2{,}50 \text{ kg}.$$

   b) Es ist

$$A = \frac{m}{c} = \frac{16{,}2 \text{ g}}{180 \text{ g/m}^2} = 900 \text{ cm}^2.$$