MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 13
01.02.2011

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“
— Lösungsvorschlag —

97. Für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X soll

die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > \mu_0$

mit $\mu_0 = 24$ zum Signifikanzniveau α getestet werden; da die Standardabweichung nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, handelt es sich um einen t–Test, so daß sich bei einem Stichprobenumfang n der Annahmebereich

$$A = \left]-\infty;\ \mu_0 + t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

mit der sich aus der Stichprobe ergebenden empirischen Streuung s und den Tabellenwerten $t_{f;\alpha}$ der t–Verteilung mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden ergibt.

a) Wegen

	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}001$
$n = 10$	$t_{9;0,05} = 1{,}833$	$t_{9;0,01} = 2{,}821$	$t_{9;0,001} = 4{,}297$
$n = 20$	$t_{19;0,05} = 1{,}729$	$t_{19;0,01} = 2{,}539$	$t_{19;0,001} = 3{,}579$
$n = 40$	$t_{39;0,05} \approx 1{,}684$	$t_{39;0,01} \approx 2{,}423$	$t_{39;0,001} \approx 3{,}307$

ergibt sich

	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}001$
$n = 10$	$A =]-\infty\ ;\ 26{,}90]$	$A =]-\infty\ ;\ 28{,}46]$	$A =]-\infty\ ;\ 30{,}79]$
$n = 20$	$A =]-\infty\ ;\ 25{,}93]$	$A =]-\infty\ ;\ 26{,}84]$	$A =]-\infty\ ;\ 28{,}00]$
$n = 40$	$A =]-\infty\ ;\ 25{,}33]$	$A =]-\infty\ ;\ 25{,}92]$	$A =]-\infty\ ;\ 26{,}61]$

b) Gemäß der Entscheidungsregel beim t–Test wird

die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > \mu_0$

genau dann abgelehnt, wenn das Stichprobenmittel $\overline{x} = 26{,}75$ nicht im Annahmebereich A liegt. Mit den unter a) erzielten Ergebnissen wird also H_0

- für $\alpha = 0{,}05$ bei $n = 20$ und $n = 40$,
- für $\alpha = 0{,}01$ bei $n = 40$ sowie
- für $\alpha = 0{,}001$ bei $n = 40$

abgelehnt; in den anderen Fällen kann H_0 nicht abgelehnt werden.

98. Für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X soll

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

mit $\mu_0 = 24$ zum Signifikanzniveau α getestet werden; da die Standardabweichung nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, handelt es sich um einen t–Test, so daß sich bei einem Stichprobenumfang n der Annahmebereich

$$A = \left[\mu_0 - t_{f;\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}};\ \mu_0 + t_{f;\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

mit der sich aus der Stichprobe ergebenden empirischen Streuung s und den Tabellenwerten $t_{f;\frac{\alpha}{2}}$ der t-Verteilung mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden ergibt.

a) Wegen

	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}001$
$n = 10$	$t_{9;0{,}025} = 2{,}262$	$t_{9;0{,}005} = 3{,}250$	$t_{9;0{,}0005} = 4{,}781$
$n = 20$	$t_{19;0{,}025} = 2{,}093$	$t_{19;0{,}005} = 2{,}861$	$t_{19;0{,}0005} = 3{,}883$
$n = 40$	$t_{39;0{,}025} \approx 2{,}021$	$t_{39;0{,}005} \approx 2{,}704$	$t_{39;0{,}0005} \approx 3{,}551$

ergibt sich

	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}001$
$n = 10$	$A = [20{,}42\ ;\ 27{,}58]$	$A = [18{,}86\ ;\ 29{,}14]$	$A = [16{,}44\ ;\ 31{,}56]$
$n = 20$	$A = [21{,}66\ ;\ 26{,}34]$	$A = [20{,}80\ ;\ 27{,}20]$	$A = [19{,}66\ ;\ 28{,}34]$
$n = 40$	$A = [22{,}40\ ;\ 25{,}60]$	$A = [21{,}86\ ;\ 26{,}14]$	$A = [21{,}19\ ;\ 26{,}81]$

b) Gemäß der Entscheidungsregel beim t–Test wird

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

genau dann abgelehnt, wenn das Stichprobenmittel $\overline{x} = 26{,}75$ nicht im Annahmebereich A liegt. Mit den unter a) erzielten Ergebnissen wird also H_0

- für $\alpha = 0{,}05$ bei $n = 20$ und $n = 40$ sowie
- für $\alpha = 0{,}01$ bei $n = 40$

abgelehnt; in den anderen Fällen kann H_0 nicht abgelehnt werden.

99. Für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X soll

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

mit $\mu_0 = 42$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ getestet werden; da die Standardabweichung σ nicht als bekannt vorausgesetzt wird, handelt es sich um einen t–Test, so daß sich der Annahmebereich

$$A = \left[\mu_0 - t_{f;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \mu_0 + t_{f;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

mit dem Tabellenwert $t_{f;\frac{\alpha}{2}}$ der t–Verteilung mit $f = n-1$ Freiheitsgraden ergibt. Bei einem Stichprobenumfang $n = 30$ und folglich $f = 29$ Freiheitsgraden sowie der empirischen Streuung $s = 3{,}5$ ist

$$\mu_0 \pm t_{f;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 42 \pm 2{,}756 \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{30}} = 42 \pm 1{,}76$$

also

$$A = [40{,}24\ ;\ 43{,}76]\,.$$

Da nun der Wert $\overline{x} = 39{,}9$ des Stichprobenmittels als Testgröße nicht im Annahmebereich $A = [40{,}24\ ;\ 43{,}76]$ liegt, kann die Hypothese H_0 abgelehnt werden; sie ist bei der vorliegenden Datenlage nicht zu halten. Dies kann als statistischer Beweis für die Alternative

$$H_1 : \mu \neq 42$$

interpretiert werden, da die Konstruktion statistischer Tests gewährleistet, daß das Risiko 1. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer wahren Hypothese H_0 und damit der Annahme einer falschen Alternative H_1, durch das gewählte Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ beschränkt ist.

100. a) Person A hat sich dafür entschieden, für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

mit $\mu_0 = 60$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ zu testen; da die Standardabweichung nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, handelt es sich um einen t–Test, wobei sich für den Annahmebereich

$$A = \left]-\infty;\ \mu_0 + t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

bei dem Stichprobenumfang $n = 25$ und folglich $f = n - 1 = 24$ Freiheitsgraden sowie der empirischen Streuung $s = 2{,}57$

$$\mu_0 + t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 60 + 2{,}492 \cdot \frac{2{,}57}{\sqrt{25}} = 61{,}28$$

ergibt. Da nun der Wert $\overline{x} = 61{,}73$ des Stichprobenmittels als Testgröße nicht im Annahmebereich $A =]-\infty; 61{,}28]$ liegt, kann die Hypothese H_0 abgelehnt werden; sie ist bei der vorliegenden Datenlage nicht zu halten.

b) Person B hat sich dafür entschieden, für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X

die Hypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu < \mu_0$

mit $\mu_0 = 60$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ zu testen; da die Standardabweichung nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, handelt es sich um einen t–Test, wobei sich für den Annahmebereich

$$A = \left[\mu_0 - t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \infty\right[$$

bei dem Stichprobenumfang $n = 30$ und folglich $f = n - 1 = 29$ Freiheitsgraden sowie der empirischen Streuung $s = 2{,}72$

$$\mu_0 - t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 60 - 2{,}462 \cdot \frac{2{,}72}{\sqrt{30}} = 58{,}78$$

ergibt. Da nun der Wert $\overline{x} = 61{,}05$ des Stichprobenmittels als Testgröße im Annahmebereich $A = [58{,}78; +\infty[$ liegt, kann die Hypothese H_0 nicht abgelehnt werden; sie steht nicht im Widerspruch zur vorliegenden Datenlage.

c) Das Vorgehen von Person A führt zur Ablehnung der Hypothese $H_0 : \mu \leq 60$ zum Signifikanzniveau 1 %; dies kann als statistischer Beweis für die Alternative $H_1 : \mu > 60$ interpretiert werden, da die Konstruktion statistischer Tests gewährleistet, daß das Risiko 1. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer wahren Hypothese H_0 und damit der Annahme einer falschen Alternative H_1, durch das gewählte Signifikanzniveau α beschränkt ist.

Dagegen führt das Vorgehen von Person B lediglich zur Nichtablehnung der Hypothese $H_0 : \mu \geq 60$ zum Signifikanzniveau 1 %; dies kann jedoch nicht als statistischer Beweis für H_0 interpretiert werden, da bei der Konstruktion statistischer Tests das Risiko 2. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Nichtablehnung auch einer falschen Hypothese H_0, nicht unter Kontrolle zu bringen ist.

Damit wird durch das Vorgehen von Person A die Annahme $\mu \geq 60$ mit einem Signifikanzniveau von 1 % statistisch bewiesen.

101. a) Person A hat sich dafür entschieden, für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X

die Hypothese $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > \mu_0$

mit $\mu_0 = 50$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ zu testen; da die Standardabweichung nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, handelt es sich um einen t–Test, wobei sich für den Annahmebereich

$$A = \left]-\infty;\ \mu_0 + t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

bei dem Stichprobenumfang $n = 25$ und folglich $f = n - 1 = 24$ Freiheitsgraden sowie der empirischen Streuung $s = 3{,}12$

$$\mu_0 + t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 50 + 1{,}711 \cdot \frac{3{,}12}{\sqrt{25}} = 51{,}07$$

ergibt. Da nun der Wert $\overline{x} = 48{,}97$ des Stichprobenmittels als Testgröße im Annahmebereich $A =]-\infty; 51{,}07]$ liegt, kann die Hypothese H_0 nicht abgelehnt werden; sie steht nicht im Widerspruch zur vorliegenden Datenlage.

b) Person B hat sich dafür entschieden, für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X

die Hypothese $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu < \mu_0$

mit $\mu_0 = 50$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ zu testen; da die Standardabweichung nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, handelt es sich um einen t–Test, wobei sich für den Annahmebereich

$$A = \left[\mu_0 - t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \infty\right[$$

bei dem Stichprobenumfang $n = 30$ und folglich $f = n - 1 = 29$ Freiheitsgraden sowie der empirischen Streuung $s = 2{,}84$

$$\mu_0 - t_{f;\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 50 - 1{,}699 \cdot \frac{2{,}84}{\sqrt{30}} = 49{,}12$$

ergibt. Da nun der Wert $\overline{x} = 49{,}08$ des Stichprobenmittels als Testgröße nicht im Annahmebereich $A = [49{,}12; +\infty[$ liegt, kann die Hypothese H_0 abgelehnt werden; sie ist bei der vorliegenden Datenlage nicht zu halten.

c) Das Vorgehen von Person A führt lediglich zur Nichtablehnung der Hypothese $H_0 : \mu \leq 50$ zum Signifikanzniveau 5 %; dies kann jedoch nicht als statistischer Beweis für H_0 interpretiert werden, da bei der Konstruktion statistischer Tests das Risiko 2. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Nichtablehnung auch einer falschen Hypothese H_0, nicht unter Kontrolle zu bringen ist.

Dagegen führt das Vorgehen von Person B zur Ablehnung der Hypothese $H_0 : \mu \geq 50$ zum Signifikanzniveau 5 %; dies kann als statistischer Beweis für die Alternative $H_1 : \mu < 50$ interpretiert werden, da die Konstruktion statistischer Tests gewährleistet, daß das Risiko 1. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer wahren Hypothese H_0 und damit der Annahme einer falschen Alternative H_1, durch das gewählte Signifikanzniveau α beschränkt ist.

Damit wird durch das Vorgehen von Person B die Annahme $\mu \leq 50$ mit einem Signifikanzniveau von 5 % statistisch bewiesen.

102. a) Aus der Stichprobe vom Umfang $n = 10$ errechnet sich der Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(37 + 37 + 38 + 40 + 42 + 42 + 44 + 45 + 47 + 48) = \frac{420}{10} = 42$$

und damit die Varianz

$$s^2 = \frac{1}{9}\Big((-5)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + \\ +0^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2\Big) = \frac{144}{9} = 16$$

sowie die Streuung

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4.$$

b) Für den unbekannten Erwartungswert μ der normalverteilten Zufallsgröße X soll

die Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$

mit $\mu_0 = 40$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ getestet werden; da die Streuung nicht bekannt ist, sondern aus der Stichprobe zu berechnen ist, handelt es sich um einen t–Test, wobei sich für den Annahmebereich

$$A = \left[\mu_0 - t_{f;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \mu_0 + t_{f;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

bei $n = 10$ und folglich $f = n - 1 = 9$ Freiheitsgraden sowie $s = 4$

$$t_{f;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}262 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 2{,}86$$

und damit $A = [37{,}14;\ 42{,}86]$ ergibt.

c) Da der Wert $\overline{x} = 42$ des Stichprobenmittels als Testgröße im Annahmebereich $A = [37{,}14;\ 42{,}86]$ liegt, kann die Hypothese H_0 nicht abgelehnt werden; sie steht nicht im Widerspruch zur vorliegenden Datenlage. Dies kann jedoch nicht als statistischer Beweis für H_0 interpretiert werden, da bei der Konstruktion statistischer Tests das Risiko 2. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Nichtablehnung auch einer falschen Hypothese H_0, nicht unter Kontrolle zu bringen ist; dieses kann in Abhängigkeit vom wahren Parameter μ bis zu $1 - \alpha$ betragen.