MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 12
25.01.2011

# Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“ — Lösungsvorschlag —

92. Für den unbekannten Erwartungswert $\mu$ der normalverteilten Zufallsgröße $X$ soll

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

mit $\mu_0 = 24$ zum Signifikanzniveau $\alpha$ getestet werden; da die Standardabweichung $\sigma = 5$ als bekannt vorausgesetzt wird, handelt es sich um einen Gauß–Test, so daß sich bei einem Stichprobenumfang $n$ der Annahmebereich

$$A = \left] -\infty;\ \mu_0 + \tau_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

mit den Tabellenwerten $\tau_\alpha$ der Standardnormalverteilung (bzw. der $t$–Verteilung mit $f = \infty$ Freiheitsgraden) ergibt.

a) Wegen

$$\tau_{0,05} = 1{,}645, \qquad \tau_{0,01} = 2{,}326 \quad \text{und} \quad \tau_{0,001} = 3{,}090$$

ergibt sich

| | $\alpha = 0{,}05$ | $\alpha = 0{,}01$ | $\alpha = 0{,}001$ |
|---|---|---|---|
| $n = 10$ | $A = ]-\infty\ ;\ 26{,}60]$ | $A = ]-\infty\ ;\ 27{,}68]$ | $A = ]-\infty\ ;\ 28{,}89]$ |
| $n = 20$ | $A = ]-\infty\ ;\ 25{,}84]$ | $A = ]-\infty\ ;\ 26{,}60]$ | $A = ]-\infty\ ;\ 27{,}45]$ |
| $n = 40$ | $A = ]-\infty\ ;\ 25{,}30]$ | $A = ]-\infty\ ;\ 25{,}84]$ | $A = ]-\infty\ ;\ 26{,}44]$ |

b) Gemäß der Entscheidungsregel beim Gauß–Test wird

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

genau dann abgelehnt, wenn das Stichprobenmittel $\overline{x} = 26{,}75$ nicht im Annahmebereich $A$ liegt. Mit den unter a) erzielten Ergebnissen wird also $H_0$

- für $\alpha = 0{,}05$ bei $n = 10$, $n = 20$ und $n = 40$,
- für $\alpha = 0{,}01$ bei $n = 20$ und $n = 40$ sowie
- für $\alpha = 0{,}001$ bei $n = 40$

abgelehnt; in den anderen Fällen kann $H_0$ nicht abgelehnt werden.

93. Für den unbekannnten Erwartungswert $\mu$ der normalverteilten Zufallsgröße $X$ soll

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

mit $\mu_0 = 24$ zum Signifikanzniveau $\alpha$ getestet werden; da die Standardabweichung $\sigma = 5$ als bekannt vorausgesetzt wird, handelt es sich um einen Gauß–Test, so daß sich bei einem Stichprobenumfang $n$ der Annahmebereich

$$A = \left[\mu_0 - \tau_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu_0 + \tau_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

mit den Tabellenwerten $\tau_{\frac{\alpha}{2}}$ der Standardnormalverteilung (bzw. der $t$–Verteilung mit $f = \infty$ Freiheitsgraden) ergibt.

a) Wegen

$$\tau_{0{,}025} = 1{,}960, \qquad \tau_{0{,}005} = 2{,}576 \quad \text{und} \quad \tau_{0{,}0005} = 3{,}291$$

ergibt sich

| | $\alpha = 0{,}05$ | $\alpha = 0{,}01$ | $\alpha = 0{,}001$ |
|---|---|---|---|
| $n = 10$ | $A = [20{,}90\ ;\ 27{,}10]$ | $A = [19{,}93\ ;\ 28{,}07]$ | $A = [18{,}80\ ;\ 29{,}20]$ |
| $n = 20$ | $A = [21{,}81\ ;\ 26{,}19]$ | $A = [21{,}12\ ;\ 26{,}88]$ | $A = [20{,}32\ ;\ 27{,}68]$ |
| $n = 40$ | $A = [22{,}45\ ;\ 25{,}55]$ | $A = [21{,}96\ ;\ 26{,}04]$ | $A = [21{,}40\ ;\ 26{,}60]$ |

b) Gemäß der Entscheidungsregel beim Gauß–Test wird

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

genau dann abgelehnt, wenn das Stichprobenmittel $\overline{x} = 26{,}75$ nicht im Annahmebereich $A$ liegt. Mit den unter a) erzielten Ergebnissen wird also $H_0$

- für $\alpha = 0{,}05$ bei $n = 20$ und $n = 40$,
- für $\alpha = 0{,}01$ bei $n = 40$ sowie
- für $\alpha = 0{,}001$ bei $n = 40$

abgelehnt; in den anderen Fällen kann $H_0$ nicht abgelehnt werden.

94. Für den unbekannnten Erwartungswert $\mu$ der normalverteilten Zufallsgröße $X$ soll

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

mit $\mu_0 = 42$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ getestet werden; da die Standardabweichung $\sigma = 3{,}5$ als bekannt vorausgesetzt wird, handelt es sich um einen Gauß–Test, so daß sich bei einem Stichprobenumfang $n = 30$ der Annahmebereich

$$A = \left[\mu_0 - \tau_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu_0 + \tau_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

mit dem Tabellenwert $\tau_{\frac{\alpha}{2}}$ der Standardnormalverteilung (bzw. der $t$–Verteilung mit $f = \infty$ Freiheitsgraden) ergibt, wegen

$$\mu_0 \pm \tau_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 42 \pm 2{,}576 \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{30}} = 42 \pm 1{,}65$$

also

$$A = [40{,}35 \; ; \; 43{,}65] \, .$$

Da nun der Wert $\overline{x} = 39{,}9$ des Stichprobenmittels als Testgröße nicht im Annahmebereich $A = [40{,}35 \; ; \; 43{,}65]$ liegt, kann die Hypothese $H_0$ abgelehnt werden; sie ist bei der vorliegenden Datenlage nicht zu halten. Dies kann als statistischer Beweis für die Alternative

$$H_1 : \mu \neq 42$$

interpretiert werden, da die Konstruktion statistischer Tests gewährleistet, daß das Risiko 1. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer wahren Hypothese $H_0$ und damit der Annahme einer falschen Alternative $H_1$, durch das gewählte Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ beschränkt ist.

95. Das Risiko 2. Art $\beta$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß die Hypothese $H_0$ nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist. Damit ist $\beta$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Testgröße $\overline{X}$ im Annahmebereich liegt, wenn $\mu_1$ der wahre Wert des Erwartungswerts von $X$ ist; in diesem Fall ist $\overline{X}$ normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_1$ und der Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

a) Es ist demnach

$$\begin{aligned}
\beta &= P_{\mu_1}\left(\mu_0 - \tau_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu_0 + \tau_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P_{\mu_1}\left(\frac{(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} - \tau_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\overline{X} - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} + \tau_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} + \tau_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma} - \tau_{\frac{\alpha}{2}}\right)
\end{aligned}$$

b) Mit $\mu_0 = 100$, $\sigma = 10$ und $n = 400$ ergibt sich

$$\beta = \Phi\left(2\,(100 - \mu_1) + \tau_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(2\,(100 - \mu_1) - \tau_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

und damit

- zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ mit $\tau_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}960$
  - für den wahren Wert $\mu_1 = 101$ also

    $$\beta = \Phi(-0{,}04) - \Phi(-3{,}96) = (1 - 0{,}5160) - (1 - 1{,}0000) = 48{,}4\ \%,$$

  - für den wahren Wert $\mu_1 = 102$ also

    $$\beta = \Phi(-2{,}04) - \Phi(-5{,}96) = (1 - 0{,}9793) - (1 - 1{,}0000) = 2{,}1\ \%.$$

- zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ mit $\tau_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}576$
  - für den wahren Wert $\mu_1 = 101$ also

$$\beta = \Phi(0{,}58) - \Phi(-4{,}58) = 0{,}7190 - (1 - 1{,}0000) = 71{,}9\ \%,$$

  - für den wahren Wert $\mu_1 = 102$ also

$$\beta = \Phi(-1{,}42) - \Phi(-6{,}58) = (1 - 0{,}9222) - (1 - 1{,}0000) = 7{,}8\ \%.$$

- zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}001$ mit $\tau_{\frac{\alpha}{2}} = 3{,}291$
  - für den wahren Wert $\mu_1 = 101$ also

$$\beta = \Phi(1{,}29) - \Phi(-5{,}29) = 0{,}9015 - (1 - 1{,}0000) = 90{,}2\ \%,$$

  - für den wahren Wert $\mu_1 = 102$ also

$$\beta = \Phi(-0{,}71) - \Phi(-7{,}29) = (1 - 0{,}7611) - (1 - 1{,}0000) = 23{,}9\ \%.$$

96. a) Es ist

$$P\,(12{,}5 \le X \le 14{,}0) = P\left(\frac{12{,}5 - 12{,}5}{2{,}5} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{14{,}0 - 12{,}5}{2{,}5}\right) =$$
$$= \Phi(0,60) - \Phi(0,00) = 0{,}7257 - 0{,}5000 = 0{,}2257 = 22{,}57\ \%$$

b) Es ist

$$0{,}025 = P\,(X > g) = 1 - P\,(X \le g) =$$
$$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{g - 12{,}5}{2{,}5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{g-12{,}5}{2{,}5}\right)$$

und damit

$$\Phi\left(\frac{g-12{,}5}{2{,}5}\right) = 0{,}975.$$

Der $\Phi$–Tabelle entnimmt man

$$\frac{g-12{,}5}{2{,}5} = 1{,}96,$$

so daß sich

$$g = 12{,}5 + 1{,}96 \cdot 2{,}5 = 17{,}4$$

ergibt.

c) Für den unbekannten Erwartungswert $\mu$ der normalverteilten Zufallsgröße $X$ soll

$$\text{die Hypothese} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{gegen die Alternative} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

mit $\mu_0 = 12{,}5$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ getestet werden; da die Standardabweichung $\sigma = 2{,}5$ als bekannt vorausgesetzt wird, handelt es sich um einen Gauß–Test, so daß sich bei einem Stichprobenumfang $n = 20$ der Annahmebereich

$$A = \left]-\infty;\ \mu_0 + \tau_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

mit dem Tabellenwert $\tau_\alpha$ der Standardnormalverteilung (bzw. der $t$–Verteilung mit $f = \infty$ Freiheitsgraden) ergibt, wegen

$$\mu_0 + \tau_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12{,}5 + 1{,}645 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{20}} = 13{,}42$$

also

$$A = ]-\infty\ ;\ 13{,}42]\,.$$

Da nun der Wert $\overline{x} = 13{,}2$ des Stichprobenmittels als Testgröße im Annahmebereich $A = ]-\infty; 13{,}42]$ liegt, kann die Hypothese $H_0$ nicht abgelehnt werden; sie steht nicht im Widerspruch zur vorliegenden Datenlage. Dies kann jedoch nicht als statistischer Beweis für $H_0$ interpretiert werden, da bei der Konstruktion statistischer Tests das Risiko 2. Art, also die Wahrscheinlichkeit der Nichtablehnung auch einer falschen Hypothese $H_0$, nicht unter Kontrolle zu bringen ist; dieses kann in Abhängigkeit vom wahren Parameter $\mu$ bis zu $1 - \alpha$ betragen.

d) Für den Fall, daß der wahre Erwartungswert von $X$ aber $\mu_1 = 13{,}5$ beträgt, ist die Testgröße $\overline{X}$ normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_1$ und der Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\beta = P_{H_1}\left(\overline{X} \in A\right) &= P_{\mu_1}\left(\overline{X} \leq 13{,}42\right) = \\ &= P\left(\frac{\overline{X} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{13{,}42 - 13{,}50}{\frac{2{,}5}{\sqrt{20}}}\right) = \Phi\left(-0{,}14\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(0{,}14\right) = 1 - 0{,}5557 = 0{,}4443 = 44{,}43\ \%.\end{aligned}$$