MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 11
18.01.2011

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten"
— Lösungsvorschlag —

83. a) Es ist $W(x) = 0$ für alle $x \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sowie

$$
\begin{aligned}
W(0) &= \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{1 \cdot 5}{495} = \frac{5}{495} = \frac{1}{99} \\
W(1) &= \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{12}{4}} = \frac{7 \cdot 10}{495} = \frac{70}{495} = \frac{14}{99} \\
W(2) &= \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{21 \cdot 10}{495} = \frac{210}{495} = \frac{42}{99} \\
W(3) &= \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{35 \cdot 5}{495} = \frac{175}{495} = \frac{35}{99} \\
W(4) &= \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{12}{4}} = \frac{35 \cdot 1}{495} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Verteilungsfunktion

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{99} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \frac{15}{99} & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ \frac{57}{99} & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ \frac{92}{99} & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } 4 \leq x \end{cases}
$$

b) Es ist

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot W(0) + 1 \cdot W(1) + 2 \cdot W(2) + 3 \cdot W(3) + 4 \cdot W(4) =$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{99} + 1 \cdot \frac{14}{99} + 2 \cdot \frac{42}{99} + 3 \cdot \frac{35}{99} + 4 \cdot \frac{7}{99} = \frac{231}{99} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$$

sowie

$$\mathrm{Var}(X) = 0^2 \cdot W(0) + 1^2 \cdot W(1) + 2^2 \cdot W(2) + 3^2 \cdot W(3) + 4^2 \cdot W(4) - (\mathbb{E}(X))^2 =$$
$$= 0^2 \cdot \frac{1}{99} + 1^2 \cdot \frac{14}{99} + 2^2 \cdot \frac{42}{99} + 3^2 \cdot \frac{35}{99} + 4^2 \cdot \frac{7}{99} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{70}{99} \approx 0{,}707$$

und

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0{,}841.$$

84. a) Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X ergibt sich $W(x) = 0$ für alle $x \notin \{1, 2, 3, 5\}$ sowie

$$\begin{aligned} W(1) &= 0,1 - 0 = 0,1 \\ W(2) &= 0,3 - 0,1 = 0,2 \\ W(3) &= 0,7 - 0,3 = 0,4 \\ W(5) &= 1 - 0,7 = 0,3 \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot W(1) + 2 \cdot W(2) + 3 \cdot W(3) + 5 \cdot W(5) = 3,2$$

sowie

$$\mathrm{Var}(X) = 1^2 \cdot W(1) + 2^2 \cdot W(2) + 3^2 \cdot W(3) + 5^2 \cdot W(5) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1{,}76$$

und

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1{,}327.$$

85. a) Es ist

$$W(32) = P(25; 32) = \frac{25^{32}}{32!} \cdot e^{-25} = 0{,}0286.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} W(7) = P(15; 7) &= \frac{15^7}{7!} \cdot e^{-15} = 0{,}0104 \\ W(8) = P(15; 8) &= \frac{15^8}{8!} \cdot e^{-15} = 0{,}0194 \\ W(9) = P(15; 9) &= \frac{15^9}{9!} \cdot e^{-15} = 0{,}0324 \\ W(10) = P(15; 10) &= \frac{15^{10}}{10!} \cdot e^{-15} = 0{,}0486 \end{aligned}$$

und damit

$$P(7 \leq X \leq 10) = 0{,}0104 + 0{,}0194 + 0{,}0324 + 0{,}0486 = 0{,}1108 \approx 11\ \%.$$

86. a) Die Körpergröße ist normalverteilt bezüglich $N(172; 8)$. Damit gilt

$$P(174 \leq X \leq 178) = P\left(\frac{174-172}{8} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{178-172}{8}\right) =$$
$$= \Phi(0,75) - \Phi(0,25) = 0{,}7734 - 0{,}5978 = 0{,}1756$$

Damit werden $300.000 \cdot 0{,}1756 = 52.680$ Uniformen dieser Größe benötigt.

b) Der frontooccipitale Kopfumfang von 24 Monaten alten Mädchen ist normalverteilt bezüglich $N(48; 2)$. Damit gilt

$$P(X \leq 44) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{44-48}{2}\right) =$$
$$= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

sowie

$$P(51 \leq X) = P\left(\frac{51-48}{2} \leq \frac{X-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$= 1 - \Phi(1,50) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

87. a) Es ist

$$P(45 \leq X \leq 55) = P\left(\frac{45-50}{4} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{55-50}{4}\right) =$$
$$= \Phi(1,25) - \Phi(-1,25) = 2\,\Phi(1,25) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888 = 78{,}88\ \%$$

b) Es ist $P(X = 50) = 0$.

c) Für den Grenzwert G soll gelten:

$$P(G < X) = P\left(\frac{G-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{G-\mu}{\sigma}\right) \leq 0{,}02$$

Wir erhalten also

$$\Phi\left(\frac{G-\mu}{\sigma}\right) \geq 0{,}98 \Rightarrow \frac{G-\mu}{\sigma} \geq 2{,}06 \Rightarrow G \geq 50 + 4 \cdot 2{,}06 = 58{,}24.$$

88. a) Es ist

$$P(1.950 \leq X \leq 2.050) =$$
$$= P\left(\frac{1.950-2.000}{40} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2.050-2.000}{40}\right) =$$
$$= \Phi(1,25) - \Phi(-1,25) = 2\,\Phi(1,25) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888 = 78{,}88\ \%$$

b) Für den Wert B soll gelten:

$$P(X < B) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{B-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}02$$

Wir erhalten also

$$\Phi\left(-\frac{B-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}98 \Rightarrow -\frac{B-\mu}{\sigma} = 2{,}05 \Rightarrow B = 2.000 - 40 \cdot 2{,}05 = 1.918$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} &B_{100;0{,}02}(k > 2) = 1 - B_{100;0{,}02}(k \leq 2) = \\ &= 1 - \binom{100}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{100} - \binom{100}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{99} - \binom{100}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98} = \\ &= 0{,}3233 = 32{,}3\ \% \end{aligned}$$

89. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der gewünschten Augenzahl beim 720-maligen Werfen eines Laplace-Würfels. X ist also nach $B(n;p)$ binomialverteilt mit $n = 720$ und $p = \frac{1}{6}$. X besitzt den Erwartungswert $np = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$, die Varianz $npq = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100$ sowie die Streuung $\sqrt{npq} = \sqrt{100} = 10$.

a) Es ist

$$\begin{aligned} P(105 \leq X \leq 125) &= B(720; \tfrac{1}{6}; 105 \leq k \leq 125) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{125 - 120 + \frac{1}{2}}{10}\right) - \Phi\left(\frac{105 - 120 - \frac{1}{2}}{10}\right) = \\ &= \Phi(0{,}55) - \Phi(-1{,}55) = 0{,}7088 - (1 - 0{,}9394) = 64{,}82\ \% \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} P(X \leq 110) &= B(720; \tfrac{1}{6}; k \leq 110) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{110 - 120 + \frac{1}{2}}{10}\right) = \Phi(-0{,}95) = 1 - 0{,}8289 = 17{,}11\ \% \end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} P(130 \leq X) &= B(720; \tfrac{1}{6}; 130 \leq k) \approx \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{130 - 120 - \frac{1}{2}}{10}\right) = 1 - \Phi(0{,}95) = 1 - 0{,}8289 = 17{,}11\ \% \end{aligned}$$

90. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(50 \leq X \leq 55) = B(150.000;\ 0{,}0003;\ 50 \leq k \leq 55)$$

erhält man

a) durch Approximation mit der Poisson–Verteilung $P(\lambda)$ mit $\lambda = 150.000 \cdot 0,0003 = 45$

$$P(50 \le X \le 55) \approx P(45;\, 50 \le X \le 55) = \sum_{k=50}^{55} \frac{45^k}{k!} e^{-45} = 0,1842$$

b) durch Approximation mit der Normalverteilung $N(\mu;\sigma)$ mit $\mu = 150.000 \cdot 0,0003 = 45$ und $\sigma = \sqrt{150.000 \cdot 0,0003 \cdot 0,9997} = 6,707$

$$\begin{aligned} P(50 \le X \le 55) &\approx \Phi\left(\frac{55 - 45 + \frac{1}{2}}{6,707}\right) - \Phi\left(\frac{50 - 45 - \frac{1}{2}}{6,707}\right) = \\ &= \Phi(1,57) - \Phi(0,67) = 0,9418 - 0,7486 = 0,1932 \end{aligned}$$

91. a) Besitzt die gegebene binomialverteilte Zufallsgröße X die Parameter n und p, ist also $X \sim B(n,p)$, so ist ihr Erwartungswert $n \cdot p = 4$ und ihre Varianz $n \cdot p \cdot (1-p) = 3$; folglich ist

$$1 - p = \frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{n \cdot p} = \frac{3}{4}, \qquad \text{also} \qquad p = \frac{1}{4},$$

und damit

$$n = \frac{n \cdot p}{p} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X den Wert 5 annimmt, ist folglich

$$P(X = 5) = \binom{16}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{11} = 0{,}1802 \approx 18{,}0\ \%.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} P(Y \ge 4) &= 1 - P(Y \le 3) = \\ &= 1 - (P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3)) = \\ &= 1 - \left(\frac{2{,}7^0}{0!}e^{-2{,}7} + \frac{2{,}7^1}{1!}e^{-2{,}7} + \frac{2{,}7^2}{2!}e^{-2{,}7} + \frac{2{,}7^3}{3!}e^{-2{,}7}\right) = \\ &= 1 - (0{,}0672 + 0{,}1815 + 0{,}2450 + 0{,}2205) = 0{,}2858 \approx 28{,}6\ \%. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} 0{,}90 = P(Z > s) &= P\left(\frac{Z-\mu}{\sigma} > \frac{s-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - P\left(\frac{Z-\mu}{\sigma} \le \frac{s-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{s-\mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

und unter Verwendung der Φ–Tabelle ergibt sich

$$-\frac{s-\mu}{\sigma} = 1{,}28, \qquad \text{also} \qquad s = \mu - 1{,}28 \cdot \sigma = 17 - 1{,}28 \cdot 5 = 10{,}6.$$