MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 10
11.01.2011

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten"
— Lösungsvorschlag —

73. a) Es gibt genau

$$\binom{42}{12} = 11.058.116.884 \text{ Möglichkeiten,}$$

aus den 42 freiwilligen Männern die 12 männlichen Testpersonen auszuwählen; entsprechend gibt es für die Auswahl der 12 weiblichen Testpersonen aus den 34 freiwilligen Frauen genau

$$\binom{34}{12} = 548.354.040 \text{ Möglichkeiten.}$$

Somit existieren genau

$$\binom{42}{12} \cdot \binom{34}{12} \approx 6 \text{ Trillionen Möglichkeiten,}$$

die Versuchsgruppe zusammenzustellen.

b) Es gibt genau

$$\binom{16}{3} = 560 \qquad \text{bzw.} \qquad \binom{16}{5} = 4.368$$

Konfigurationen für das Oberkiefer bzw. das Unterkiefer und damit insgesamt

$$\binom{16}{3} \cdot \binom{16}{5} = 2.446.080 \text{ Gebißkonfigurationen.}$$

74. Es gibt insgesamt

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ (gleichwahrscheinliche) Ergebnisse.}$$

Ein Ergebnis ω gehört genau dann zum Ereignis A_k, wenn genau k Zahlen von ω unter den 6 vom Spieler getippten Zahlen sind — dafür gibt es genau $\binom{6}{k}$ Möglichkeiten – und die verbleibenden $6 - k$ Zahlen von ω unter den 43 vom

Spieler nicht getippten Zahlen sind — dafür gibt es genau $\binom{43}{6-k}$ Möglichkeiten. Es ist also

$$|A_k| = \binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
P(A_0) &= \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{6.096.454}{13.983.816} = 0{,}4360 \\
P(A_1) &= \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{5.775.588}{13.983.816} = 0{,}4130 \\
P(A_2) &= \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{1.851.150}{13.983.816} = 0{,}1324 \\
P(A_3) &= \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246.820}{13.983.816} = 0{,}0177 \\
P(A_4) &= \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13.545}{13.983.816} = 9{,}69 \cdot 10^{-4} \\
P(A_5) &= \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13.983.816} = 1{,}84 \cdot 10^{-5} \\
P(A_6) &= \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816} = 7{,}15 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn liegt demnach bei

$$P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = \frac{260.624}{13.983.816} = 1{,}86\ \%$$

75. Man betrachte die Ereignisse

$$R: \text{„Der Verstorbene war Raucher."}$$

und

$$T: \text{„Die Todesursache war Herzinfarkt."}$$

Gemäß der Studie ist $P(R) = 0,300$, $P(I) = 0,125$ und $P_I(R) = 0,390$, woraus sich $P(\bar{R}) = 0,700$ und $P_I(\bar{R}) = 0,610$ ergibt. Es ist

$$P_R(I) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{P_I(R) \cdot P(I)}{P(R)} = \frac{0{,}390 \cdot 0{,}125}{0{,}300} = 16{,}3\ \%$$

bzw.

$$P_{\bar{R}}(I) = \frac{P(I \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P_I(\bar{R}) \cdot P(I)}{P(\bar{R})} = \frac{0{,}610 \cdot 0{,}125}{0{,}700} = 10{,}7\ \%.$$

76. Man betrachte die Ereignisse

$$E: \text{„Der Teilnehmer ist im ersten Semester."}$$

und

$$B: \text{„Der Teilnehmer besteht die Klausur."}$$

Demnach ist $P(E) = 0{,}60$ sowie $P_E(B) = 0{,}70$ und $P_{\bar{E}}(B) = 0{,}80$, woraus $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 0{,}40$ und

$$P(B) = P_E(B) \cdot P(E) + P_{\bar{E}}(B) \cdot P(\bar{E}) = 0{,}70 \cdot 0{,}60 + 0{,}80 \cdot 0{,}40 = 0{,}74$$

folgt. Wegen $P_E(\bar{B}) = 1 - P_E(B) = 0{,}30$ und $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}26$ erhält man schließlich

$$P_{\bar{B}}(E) = \frac{P(E \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P_E(\bar{B}) \cdot P(E)}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}60}{0{,}26} = 69{,}2\ \%.$$

77. Man betrachte die Ereignisse

$$F: \text{„Es handelt sich um eine Frau."}$$

und

$$G: \text{„Die Gesetzesinitiative wird befürwortet."}$$

Demnach ist $P(F) = 0{,}60$ sowie $P_F(G) = 0{,}40$ und $P_{\bar{F}}(G) = 0{,}50$, woraus sich $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 0{,}40$ ergibt.

a) Es ist

$$P(G) = P_F(G) \cdot P(F) + P_{\bar{F}}(G) \cdot P(\bar{F}) = 0{,}40 \cdot 0{,}60 + 0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}44 = 44\ \%$$

sowie

$$P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56 = 56\ \%.$$

b) Es ist

$$P_G(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap G)}{P(G)} = \frac{P_{\bar{F}}(G) \cdot P(\bar{F})}{P(G)} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}40}{0{,}44} = 45{,}5\ \%.$$

c) Es ist

$$P_{\bar G}(F) = \frac{P(F\cap \bar G)}{P(\bar G)} = \frac{P_F(\bar G)\cdot P(F)}{P(\bar G)} = \frac{0{,}60\cdot 0{,}60}{0{,}56} = 64{,}3\ \%.$$

78. Es ist $A\cap B = \{1,4\}$, $A\cap C = \{1,2\}$ und $B\cap C=\{1,8\}$ sowie $A\cap B\cap C = \{1\}$.

a) $P(A\cap B) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(B)$
$P(A\cap C) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(C)$
$P(B\cap C) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(B)\cdot P(C)$
$P(A\cap B\cap C) = \frac18 = \frac12\cdot\frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

b) $P(A\cap B) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(B)$
$P(A\cap C) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(C)$
$P(B\cap C) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(B)\cdot P(C)$
$P(A\cap B\cap C) = \frac1{16} \neq \frac12\cdot\frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

79. a) In M_1 weisen $\frac{3}{100}\cdot 10.000 = 300$ Personen, in M_2 $\frac{5}{100}\cdot 30.000 = 1.500$ Personen, in M_3 $\frac{8}{100}\cdot 20.000 = 1.600$ Personen und in M_4 $\frac{4}{100}\cdot 10.000 = 400$ Personen das Merkmal A auf.

b) Es ist $P(A) =$

$$P_{M_1}(A)\cdot P(M_1) + P_{M_2}(A)\cdot P(M_2) + P_{M_3}(A)\cdot P(M_3) + P_{M_4}(A)\cdot P(M_4) =$$
$$= \frac{3}{100}\cdot\frac17 + \frac{5}{100}\cdot\frac37 + \frac{8}{100}\cdot\frac27 + \frac{4}{100}\cdot\frac17 = \frac{38}{700} = 5{,}43\ \%.$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}
P_A(M_1) &= \frac{P_{M_1}(A)\cdot P(M_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{100}\cdot\frac17}{\frac{38}{700}} = \frac{3}{38} = 7{,}89\ \%\\
P_A(M_2) &= \frac{P_{M_2}(A)\cdot P(M_2)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{100}\cdot\frac37}{\frac{38}{700}} = \frac{15}{38} = 39{,}47\ \%\\
P_A(M_3) &= \frac{P_{M_3}(A)\cdot P(M_3)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{100}\cdot\frac27}{\frac{38}{700}} = \frac{16}{38} = 42{,}11\ \%\\
P_A(M_4) &= \frac{P_{M_4}(A)\cdot P(M_4)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{100}\cdot\frac17}{\frac{38}{700}} = \frac{4}{38} = 10{,}53\ \%
\end{aligned}$$

80. Es ist

$$\begin{aligned}
P_a &= B(100;0{,}015;0) = \binom{100}{0}\cdot 0{,}015^0\cdot 0{,}985^{100} = 0{,}2206\\
P_b &= B(100;0{,}015;1) = \binom{100}{1}\cdot 0{,}015^1\cdot 0{,}985^{99} = 0{,}3360\\
P_c &= B(100;0{,}015;2) = \binom{100}{2}\cdot 0{,}015^2\cdot 0{,}985^{98} = 0{,}2532\\
P_d &= 1-(P_a+P_b) = 1-(0{,}2206+0{,}3360) = 0{,}4434\\
P_e &= P_a+P_b+P_c = 0{,}2206+0{,}3360+0{,}2532 = 0{,}8098
\end{aligned}$$

81. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, daß sich unter n Blutspendern wenigstens eine Person mit der Blutgruppe B negativ befindet, ist

$$P(A) = 1 - B(n; 0{,}02; 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^n = 1 - 0{,}98^n.$$

a) Es ist

$$P(A) \geq 0{,}75 \iff 1 - 0{,}98^n \geq 0{,}75 \iff 0{,}98^n \leq 0{,}25 \iff$$
$$\iff n \cdot \ln 0{,}98 \leq \ln 0{,}25 \iff n \geq \frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}98} \approx 68{,}62.$$

Damit werden mindestens 69 Blutspender benötigt.

b) Es ist

$$P(A) \geq 0{,}90 \iff 1 - 0{,}98^n \geq 0{,}90 \iff 0{,}98^n \leq 0{,}10 \iff$$
$$\iff n \cdot \ln 0{,}98 \leq \ln 0{,}10 \iff n \geq \frac{\ln 0{,}10}{\ln 0{,}98} \approx 113{,}97.$$

Damit werden mindestens 114 Blutspender benötigt.

82. a) Im Beobachtungszeitraum von 10 Jahren werden $n = 6 \cdot 10^6$ Kinder geboren. Für die Wahrscheinlichkeit P, daß die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ einer Knabengeburt von deren Wahrscheinlichkeit p um höchstens $\varepsilon = 10^{-3}$ abweicht, gilt nach der Ungleichung von Tschebyschow

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4 \cdot (6 \cdot 10^6) \cdot (10^{-3})^2} = 0{,}9583.$$

b) Im Beobachtungszeitraum von m Jahren werden $n = 6 \cdot 10^5 \cdot m$ Kinder geboren. Für die Wahrscheinlichkeit P, daß die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ einer Knabengeburt von deren Wahrscheinlichkeit p um höchstens $\varepsilon = 10^{-3}$ abweicht, erhalten wir mit der Ungleichung von Tschebyschow den Ansatz

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} \geq 0{,}99,$$

also

$$0{,}01 \geq \frac{1}{4\,n\,\varepsilon^2} = \frac{1}{4 \cdot (6 \cdot 10^5 \cdot m) \cdot (10^{-3})^2} = \frac{1}{2{,}4 \cdot m}$$

und damit

$$m \geq \frac{1}{2{,}4 \cdot 0{,}01} = 41{,}66.$$

Der Beobachtungszeitraum müßte also auf 41 Jahre und 8 Monate verlängert werden.