MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

WiSe 2010/11
04.12.10

Klausur zur Mathematik I für gymnasiales Lehramt

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: ....

Geburtsdatum: ....

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(b) Arbeitszeit: 9:30 - 11:00 Uhr.

(c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**

(e) Jede Aufgabe gibt die selbe Punktzahl.

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1.

Sei $\mathcal{K}$ ein archimedischer Körper und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N},$ so dass $\forall k \geq n\ |a_k - a_n| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N},$ so dass $\forall k, l \geq n\ |a_k - a_l| < \varepsilon$

Beweis

„$\Uparrow$“ Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}$ so dass $\forall k, l \geq n : \quad |a_k - a_l| < \varepsilon$. Insbesonders für $l = n$ $|a_k - a_l| = |a_k - a_n| < \varepsilon$.

„$\Downarrow$“ Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon/2 > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ so dass $\forall k \geq n : \ |a_k - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seien $k, l \geq n$. Dann

$$|a_k - a_l| = |a_k - a_n + a_n - a_l| \overset{\triangle\ Ungl.}{\leq} |a_k - a_n| + |a_n - a_l| = |a_k - a_n| + |a_l - a_n| < 2(\varepsilon/2) = \varepsilon.$$

□

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der Brüche dicht in $\mathbb{R}$ liegt, d.h. dass es für zwei beliebige reelle Zahlen $x < y$ immer einen Bruch b gibt, so dass $x < b < y$.

Beweis: Seien $x < y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon = y - x$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Aus dem selben Grund, $\exists m \in \mathbb{N}$ so dass $m\frac{1}{n} > x$. Man wähle das kleinst mögliche m, also $(m-1)\frac{1}{n} \leq x$. Also

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = x + y - x = y.$$

Sei $b = \frac{m}{n}$. Dann $b \in \mathbb{Q}$ und $x < b < y$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\ .$$

Beweis. <u>I.A.</u> $n = 1 \Rightarrow 1 + x = 1 + x$.

<u>I.S.</u> Wir nehmen an, dass $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Dann

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{I.S.}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \overset{(nx^2 \geq 0)}{\geq} 1 + (n+1)x.$$

□

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage eine Tautologie ist (d.h. aus logischen Gründen immer wahr)

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$\star$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Relation

$$R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Beweis. Reflexivität: $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $ab = ba$ (Kommutativität von $\mathbb{N}$) $\Rightarrow (a, b) \sim (a, b)$.

Symmetrie: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ so dass $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow da \overset{Komm}{=} ad = bc \overset{Komm}{=} cb \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$.

Transitivität: Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ so dass $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$, d.h. es gilt

$$ad = bc \text{ und } cf = de.$$

Zu zeigen: $(a, b) \sim (e, f)$, d.h. $af = be$. Es ist aber

$$d(af) = f(ad) = f(bc) = b(cf) = b(de) = d(be).$$

Da $d \in \mathbb{N}$ $(d > 0)$: $d(af) = d(be) \Rightarrow af = be$. $\square$