Lösungen der Aufgaben der zweiten Probeklausur

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegeben durch $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ konvergiert.

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge monoton steigend, und von oben beschränkt ist, und deswegen konvergiert sie. Um eine obere Schranke zu finden, nehme zuerst an, dass $\lim(a_n) = a$ und löse die folgende Gleichung auf: $a = \sqrt{2+a} \Rightarrow a^2 = 2+a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ oder $a = -1$. Da alle Folgenglieder positiv sind, muss $a = 2$.

Wir zeigen mittels v.I., dass (a_n) monoton steigend ist. Der Beweis hängt vom Prinzip ab, dass $\sqrt{x}$ ist eine monoton steigende Funktion ist. Dieses folgt aus den Axiomen eines angeordneten Körpers. I.A.: $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$. I.S.: Nehme an $a_n < a_{n+1}$. Also $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \overset{I.V}{<} \sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$. Also $a_n < a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen mittels v.I., dass 2 eine obere Schranke für (a_n) ist. I.A.: $2 < 4 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$. I.S.: Nehme an, dass $a_n < 2$. Also $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \overset{I.V.}{<} \sqrt{2+2} = 2$. Also $a_n < 2\ \forall n \in \mathbb{N}$. Da (a_n) monoton steigend und von oben beschränkt ist, konvergiert sie, und sogar zu den Limes $a = 2$. □

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränke Folge. Zeigen Sie, dass $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ der größte Häufungspunkt dieser Folge ist. (Sie dürfen benutzen, dass $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ ein Häufungspunkt ist.)

Beweis. (Ich bedanke mich bei G. Bubbnik für diesen Beweis Vorschlag.) Sei b ein H.P. der Folge (a_n) und sei $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge die zu b konvergiert. Da $(\sup(a_i)_{i\geq n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, alle Teilfolgen davon konvergieren auch gegen a. Da $a_{k_n} \leq \sup(a_i)_{i\geq k_n}$ es gilt,

$$b = \lim_{n\to\infty}(a_{k_n}) \leq \lim_{n\to\infty}(\sup(a_i)_{i\geq k_n})_{n\in\mathbb{N}} = a.$$

□

(Ein alternativer Beweis wäre per Widerspruch.)

Aufgabe 3. Sei D eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Beweis. Nehme an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist (W.A.), d.h. $\exists \varepsilon > 0$ so dass $\forall \delta > 0$ $\exists x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Insbesonders $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ (**) und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Wir haben also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ beschränkt. Aus Bolzano-Weierstrass folgt, dass es eine konvergente Teilfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, also sei $a := \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$. Aus der Abgeschlossenheit von D, $a \in D$ (siehe Blatt 11).

Auf Grund der Stetigkeit von f, $\forall \nu > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \nu$. Also $\forall \nu > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall x, y \in D$ mit $|x-a| < \delta$ und $|y-a| < \delta$ gilt,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(a) + f(a) - f(y)| \overset{\Delta\ Ungl.}{\leq} |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < 2\nu. (***)$$

Wähle $\nu = \varepsilon/3$ und sei δ, so dass (***) erfüllt ist. Wähle jetzt n gross genug, so dass $1/n < \delta/2$ (Archimedes Axiom) und $|a_n - a| < \delta/2$ (*) (Definition Konvergenz).

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ existiert $m \geq n$, so dass $a_n = x_m$. Also,

$$|y_m - a| = |y_m - a + x_m - x_m| \leq |x_m - a| + |y_m - x_m| \overset{*,**}{\leq} \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{n} < \delta.$$

Da $|y_m - a| < \delta$ und $|x_m - a| < \delta/2 < \delta$, aus (***) folgt also, dass $|f(x_m) - f(y_m)| < 2\nu = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme (**). Also muss f gleichmäßig stetig sein. $\square$

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe liegen alle angegebene Zahlen in $\mathbb{C}$.

i) Gebe die Polarkoordinatendarstellung von $-5\sqrt{3} + 5i$ an.
$-5\sqrt{3} + 5i = re^{i\theta} = 10e^{\frac{i5\pi}{6}}$.
Der radius $r = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{100} = 10$. Und $\theta = \arctan\left(\frac{5}{-5\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (siehe Blatt 13). Da die Zahl im zweiten Quadrant liegt, $\theta = -\pi/6 + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

ii) Gebe $2e^{5i\pi/4}$ in der Form $x + yi$ an.

$$2e^{5i\pi/4} = 2(\cos(5\pi/4) + \sin(5\pi/4)i) = 2(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}i) = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{-2}{\sqrt{2}}i = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

(siehe Blatt 13).

iii) Finde die dritte Wurzeln der Zahl $z = 27\sqrt{2} + 27\sqrt{2}i$.
Eine Wurzel finden wir bei:

$$z^{1/3} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{(27\sqrt{2})^2 + (27\sqrt{2})^2}}\right)\left(e^{i\frac{\arctan(\sqrt{2}/\sqrt{2})}{3}}\right) = \left(\sqrt[3]{\sqrt{27^2 \cdot 4}}\right)e^{i\frac{\pi/4}{3}} = \sqrt[3]{54}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

(siehe Blatt 13). Alle drei Wurzeln sind also

$$z^{1/3} = 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\ 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}},\ 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}}.$$

Aufgabe 5. Berechne die Ableitung von e^x für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir leiten erst e^x an der Stelle $x = 0$ ab. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Nullfolge.

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\frac{e^y - e^0}{y} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right) = \lim\left(\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_n^i}{i!} - 1}{x_n}\right)\\
&= \lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_n^i}{i!}}{x_n}\right) = \lim\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_n^{i-1}}{i!}\right)\\
&= \lim\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_n^i}{(i+1)!}\right) = \lim\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_n^i}{(i+1)!}\right)\\
&= 1 + \lim\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_n^i}{(i+1)!}\right) \overset{*}{=} 1.
\end{aligned}$$

Wir behaupten jetzt *. Sei $1 > \varepsilon > 0$ und sei n, so dass $\forall m \geq n\ |x_m| < \varepsilon/2 < 1$. Dann bei der Restgliedabschätzung, $R_{N+1}(|x|) < 2|x|^{N+1}/((N+1)!)$ für $N = 0$ haben wir $\forall m \geq n$:

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_m^i}{(i+1)!}\Big| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_m|^i}{(i+1)!} < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_m|^i}{i!} = R_1(|x_m|) \leq 2|x_m| < 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_n^i}{(i+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge und daraus folgt, dass $\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right) = 1$.
Sei jetzt $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to x}\left(\frac{e^y - e^x}{y - x}\right) &= \lim_{y\to x}\left(\frac{e^{y-x+x} - e^x}{y - x}\right) = \lim_{y\to x}\left(\frac{e^{y-x}e^x - e^x}{y - x}\right)\\
&= \lim_{y\to x}\left(e^x\frac{e^{y-x} - 1}{y - x}\right) = e^x \lim_{(y-x)\to 0}\left(\frac{e^{y-x} - 1}{y - x}\right)\\
&= e^x \cdot 1 \text{ (von oben) } = e^x.
\end{aligned}$$

Also $(e^x)' = \lim_{y\to x}\left(\frac{e^y - e^x}{y - x}\right) = e^x$. $\square$