MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

WiSe 2010/11
05.02.11

Klausur zur Mathematik I für gymnasiales Lehramt

Nachname: .... Vorname:.........................

Matrikelnummer: ....

Geburtsdatum: ....

alte LPO ☐ neue LPO ☐.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(b) Arbeitszeit: 12:30 - 14:00 Uhr.

(c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**

(e) Jede Aufgabe gibt die selbe Punktzahl.

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Musterlösung

Aufgabe 1.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht stetig.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}$ und sei $0 < \varepsilon < 1$. Da $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, $\forall \delta > 0$, in jeder δ Umgebung in $\mathbb{R}$, insbesondere in jeder δ Umgebung von x, gibt es ein $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in dieser δ Umgebung. Also $\forall \delta$, gibt es y, so dass $|x - y| < \delta$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, und $|f(x) - f(y)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$. Also kann f nicht stetig auf $\mathbb{Q}$ sein.

Genau der selbe Beweis mit $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ getauscht zeigt, dass f night stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sein kann. Also f ist auf ganz $\mathbb{R}$ nicht stetig. $\square$

Aufgabe 2. Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. Beweisen Sie jeweils mit Hilfe der Ihnen aus der Vorlesung bekannten Kriterien, dass die Reihe konvergiert (bzw. nicht konvergiert).

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} (k-3)^{1/4}$

Lösung. Diese Reihe is NICHT KONVERGENT, weil die Terme in einer konvergente Reihe müssen eine Nullfolge bilden, und $((k-3)^{1/4})_k$ ist keine Nullfolge. Man kann einfach beweisen, dass es keine Nullfolge ist, weil $\forall k \geq 4$, $(k-1)^{1/4} \geq 1$, also die angeschlossene Folge kann nicht zu 0 konvergieren. $\square$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$

Lösung. Diese Reihe is KONVERGENT, nach dem Quotientenkriterium. Dieses Kriterium sagt, dass wenn eine Reihe $\sum_n^{\infty} a_n$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, also die Reihe konvergiert. In unserem Fall,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5^{k+1}/(k+1)!}{5^k/k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{5^{k+1}}{5^k} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+1} = 0 < 1.$$

$\square$

Aufgabe 3. Leiten Sie die Trigonometrischen Formeln

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)^2 + \sin(x)^2 &= 1 \end{aligned}$$

her. Zeigen Sie dann, dass

$$\sin(x + \pi/2) = \cos(x) .$$

Beweis. Seien die folgenden aus der Vorlesung Definitionen/gezeigten Sätze notiert mit: (*): $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, (**): $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ und (***): $i^2 = -1$. Also

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &\stackrel{**}{=} \exp(i(x+y)) \\ &\stackrel{*}{=} \exp(ix)\exp(iy) \\ &\stackrel{**}{=} (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) \\ &\stackrel{***}{=} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)). \end{aligned}$$

Da die reele und imaginäre Teile einer komplexen Zahl eindeutig sind, muss also $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ und $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$, und wir haben die ersten zwei Formel bewiesen.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\forall x \in \mathbb{R},\ |\exp(ix)| = 1$ also $|\exp(ix)|^2 = 1$. Aus der Definition des Betrages einer komplexen Zahl und (**) haben wir $1 = (Re(\exp(ix)))^2 + (Im(\exp(ix)))^2 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$, und also die dritte Formel.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, und haben also von der Additionsformel für sinus

$$\sin(x + \pi/2) = \sin(x)\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)\cos(x) = \cos(x),$$

und also die vierte Formel. □

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Auf einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Beweis. Sei D eine abgeschlossene Menge und $(x_n)_n \subset D$ eine Cauchy Folge. Da jede Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, sei $x = \lim_{n\to\infty}(x_n) \in \mathbb{R}$. Wir zeigen jetzt die Behauptung, nämlich, dass $x \in D$ per Widerspruch. Nehme an $x \notin D$ (W.A.), also $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Da D abgeschlossen ist, per Definition von abgeschlossen, $\mathbb{R} \setminus D$ ist offen. Bei der Definition von offen, gibt es $\delta > 0$, so dass wenn $|x - y| < \delta$, dann $y \in \mathbb{R} \setminus D$ (*). Bei der Definition von Konvergenz zu x, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m \geq N, |x_m - x| < \delta$. Insbesondere $|x_N - x| < \delta$, also bei (*) $x_N \in \mathbb{R} \setminus D$. Das ist ein Widerspruch zu $(x_n)_n \subset D$, also muss die Widerspruchs Annahme falsch sein, in anderen Wörtern, $x \in D$. □

Aufgabe 5. Wo ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

differenzierbar? Was ist die Ableitung von g? Überprüfen Sie an allen Stellen, an denen die Ihnen bekannten Ableitungsregeln nicht anwendbar sind, die Differenzierbarkeit direkt.

Lösung. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Ableitung gegeben durch:

$$(x^2 \sin(1/x^2))' = 2x\sin(1/x^2) + x^2\cos(1/x^2)(-2x^{-3}) = 2x\sin(1/x^2) - 2\frac{\cos(1/x^2)}{x}. \quad (*)$$

Um abzuleiten wurden die folgende Identitäten benutzt:

(1) $(f(x)h(x))' = f'(x)h(x) + f(x)h'(x)$ (Produktregel),

(2) $\frac{d(f(h(x)))}{dx} = \frac{d(f(h(x)))}{d(h(x))}\frac{d(h(x))}{dx}$ (Kettenregel),

(3) $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin(x))' = \cos(x)$ (Bestimmte Ableitungsformeln).

Da die Ableitung (*) auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ wohldefiniert ist, ist g auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differnzierbar.

Für $x = 0$, betrachten wir eine Nullfolge $(x_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also der Differenzenquotient an der Stelle $x = 0$ gibt:

$$\lim_{y\to 0} \frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \sin(1/x_n^2) - 0}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \sin(1/x_n^2) \stackrel{**}{=} 0.$$

Wir behaupten jetzt (**), und zeigen also dass der Differenzenquotient einen Limes hat, und ist die Funktion deswegen auch an $x = 0$ differenzierbar. Die Folge (x_n) ist eine Nullfolge und die Folge $(\sin(1/x_n^2))$ ist eine beschränkte Folge, also ihr Produkt ist eine Nullfolge, und daher (**).

Zusammenfassend gilt: g ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$g'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x^2) - \frac{2\cos(1/x^2)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

□