

# Klausur I-Musterlösung (Analysis 1, Prof. Pickl)

## Aufgabe 1.

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  gegeben durch

$$p_n = \frac{6n^4 + 3n^2}{5n^4 + 8n}.$$

Zitieren Sie dabei alle in der Vorlesung oder Übung gezeigten Sätze über konvergente Folgen bzw. in der Vorlesung oder Übung behandelten Beispiele für konvergente Folgen, die Sie benutzen. Numerieren Sie diese und geben Sie bei den jeweiligen Umformungen zur Berechnung des obigen Limes an, welche Formel Sie benutzten (Zahl der Formel unter das =-Zeichen). Bruchrechenregeln (Erweitern, Kürzen) dürfen Sie ohne Angabe des Rechengesetzes verwenden.

## Lösung

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 3n^2}{5n^4 + 8n} \left( \times \frac{1/n^4}{1/n^4} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 3/n^2}{5 + 8/n^3} \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\lim(6) + \lim(3/n^2)}{\lim(5) + \lim(8/n^3)} \\ &\stackrel{(3),(4)}{=} \frac{6 + \lim(3) \lim(1/n^2)}{5 + \lim(8) \lim(1/n^3)} \\ &\stackrel{(3),(5)}{=} \frac{6 + 3 \cdot 0}{5 + 8 \cdot 0} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

(1) Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren und  $\lim_{n \rightarrow \infty}(b_n) \neq 0$ , dann  $\lim(a_n/b_n) = \lim(a_n)/\lim(b_n)$ .

(2) Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren, dann  $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$ .

(3) Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konstante Folge ist mit  $a_n = c \forall n \in \mathbb{N}$ , dann  $\lim(a_n) = c$ .

(4) Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren, dann  $\lim(a_n b_n) = \lim(a_n) \lim(b_n)$ .

(5) Für alle  $k \geq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty}(1/n^k) = 0$ . Dieses folgt aus dem Fakt, dass in jedem archimedisch angeordneten Körper  $\lim_{n \rightarrow \infty}(1/n) = 0$  und aus dem Produktregel (4) oben.  $\square$

## Aufgabe 2.

Gegeben sei die Menge  $\mathcal{M} := \{1, 2, 3\}$ . Überprüfen sie, ob die Multiplikation  $\odot$  gegeben durch

$$a \odot b = \text{Rest beim Teilen von } ab \text{ durch } 4$$

abgeschlossen ist, d.h. ob für alle  $a, b \in \mathcal{M}$  auch  $a \odot b \in \mathcal{M}$ . Warum ist die Verknüpfung kommutativ? Ist  $(\mathcal{M}, \odot)$  eine Gruppe? Beweisen bzw. widerlegen Sie Ihre Behauptung.

**Lösung.** Die Multiplikation ist nicht abgeschlossen auf dieser Menge, weil  $2 \odot 2 = 0 \notin \mathcal{M}$ .

Die Verknüpfung ist kommutativ weil Multiplikation auf  $\mathbb{N}$  kommutativ ist. Genauer gesagt, sei  $R_4(a, b)$  der Rest (in  $\mathbb{R}$ ) wenn man  $ab$  durch 4 teilt. Da Multiplikation auf den reellen Zahlen kommutativ ist,  $ab = ba$  also  $R_4(a, b) = R_4(b, a)$ . Daraus folgt, dass  $\forall a, b \in \mathcal{M}$ ,  $a \odot b = R_4(a, b) = R_4(b, a) = b \odot a$ .

Die Menge  $\mathcal{M}$  mit der Verknüpfung  $\odot$  ist keine Gruppe, weil sie nicht abgeschlossen ist, wessen eine (wichtige) Eigenschaft einer Gruppe ist.  $\square$

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie folgenden, in der Vorlesung behandelten Satz: Sei  $\mathcal{K}$  ein archimedisch angeordneter Körper,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$  konvergent. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Beweis.** Seien  $\lim_{n \rightarrow \infty}(a_n) = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty}(b_n) = b$  und  $\varepsilon > 0$ . Aus Konvergenz der Folgen folgt  $\exists N$ , so dass  $\forall n \geq N$   $|a_n - a| < \varepsilon/2$  und  $\exists N'$ , so dass  $\forall n' \geq N'$   $|b_{n'} - b| < \varepsilon/2$ . Sei  $M = \max(N, N')$ . Also  $\forall m \geq M$ :

$$|(a_m + b_m) - (a + b)| \stackrel{\Delta U_{ngl.}}{\leq} |a_m - a| + |b_m - b| \underset{m \geq N, m \geq N'}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also  $\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim(a_n) + \lim(b_n)$ . □

#### Aufgabe 4.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Formel

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

**Beweis.** Induktions Anfang: für  $n = 1$  es gilt,

$$\sum_{k=0}^1 k(k+1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}.$$

Induktions Schritt. Wir nehmen an (I.A.), dass  $\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ . Dann für  $n+1$  haben wir,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=0}^n k(k+1) + (n+1)(n+2) \\ &\stackrel{I.A.}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}. \end{aligned}$$

Beim Induktionsprinzip, ist also  $\sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . □

#### Aufgabe 5. Beweisen Sie die Irrationalität von $\sqrt{3}$ .

**Beweis.** Wir beweisen diese Aussage per Widerspruch, also nehme an, dass es  $p, q \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $p/q = \sqrt{3}$ . Jede rationale Zahl hat eine vollgekürzte Darstellung, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nehmen wir an, dass  $p/q$  vollgekürzt ist. Von der Annahme wissen wir, dass  $p^2 = 3q^2$ , also 3 ist ein Faktor von  $p^2$ . Da das Quadrat einer ganzen Zahl die selbe Primfaktoren als die Zahl selbe hat, muss dann 3  $p$  teilen  $\Rightarrow p^2 = (3k)^2 = 3^2 k^2$ . Dann,  $3^2 k^2 = 3q^2 \Rightarrow 3k^2 = q^2$ , also muss 3  $q^2$  teilen. Aus dem selben Grund muss dann 3 auch  $q$  teilen, also 3 teilt beide  $p$  und  $q$ . Dieses ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $p/q$  vollgekürzt ist. Also kann es keine rationale Darstellung von  $\sqrt{3}$  geben. □