MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

WiSe 2010/11
04.12.10

Klausur zur Mathematik I für gymnasiales Lehramt

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: ....

Geburtsdatum: ....

1	2	3	4	5	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen ein!**

(b) Arbeitszeit: 9:30 - 11:00 Uhr.

(c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**

(e) Jede Aufgabe gibt die selbe Punktzahl.

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1.

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p_n = \frac{6n^4 + 3n^2}{5n^4 + 8n} \ .$$

Zitieren Sie dabei alle in der Vorlesung oder Übung gezeigten Sätze über konvergente Folgen bzw. in der Vorlesung oder Übung behandelten Beispiele für konvergente Folgen, die Sie benutzen. Numerieren Sie diese und geben Sie bei den jeweiligen Umformungen zur Berechnung des obigen Limes an, welche Formel Sie benutzten (Zahl der Formel unter das $=$-Zeichen).

Bruchrechenregeln (Erweitern, Kürzen) dürfen Sie ohne Angabe des Rechengesetzes verwenden.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Menge $\mathcal{M} := \{1, 2, 3\}$. Überprüfen sie, ob die Multiplikation $\odot$ gegeben durch

$$a \odot b = \text{Rest beim Teilen von } ab \text{ durch } 4$$

abgeschlossen ist, d.h. ob für alle $a, b \in \mathcal{M}$ auch $a \odot b \in \mathcal{M}$. Warum ist die Verknüpfung kommutativ?

Ist $(\mathcal{M}, \odot)$ eine Gruppe? Beweisen bzw. widerlegen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3. Beweisen Sie folgenden, in der Vorlesung behandelten Satz: Sei $\mathcal{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ konvergent. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \ .$$

Aufgabe 5. Beweisen Sie die Irrationalität von $\sqrt{3}$.