MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2010/11

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $\forall\varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n$, so dass $|a_k - x| < \varepsilon$;

ii) Es existiert eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert.

Aufgabe 2. Man untersuche die folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aufgabe 3. Man beweise die folgende Charakterisierung des Limes superior.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Genau dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für fast alle Indizes $n \in \mathbb{N}$ (d.h. bis auf endlich viele) gilt $a_n < a + \varepsilon$.
2. Es gibt unendlich viele Indizes $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m > a - \varepsilon$.

Aufgabe 4.

i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim a_n = \infty$ und $\lim b_n = b,\ b \in \mathbb{R}$. Man beweise:

   a) $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

   b) Ist $b > 0$, so gilt $\lim(a_n b_n) = \infty$; ist $b < 0$, so gilt $\lim(a_n b_n) = -\infty$.

ii) Man gebe Beispiele reeller Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim a_n = \infty$ und $\lim c_n = 0$ an, so dass jeder der folgenden Fälle eintritt:

   a) $\lim(a_n c_n) = \infty$.

   b) $\lim(a_n c_n) = -\infty$.

   c) $\lim(a_n c_n) = r$ wobei r eine beliebig vorgegebene reele Zahl ist.

   d) Die Folge $(a_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschänkt, aber nicht konvergent.

Abgabe ist Montag 20.12.2010 vor der Vorlesung.