MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2010/11

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{K}$ ein archimedischer Körper und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$, so dass $\forall k \geq n :\ |a_k - a_n| < \varepsilon$,
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$, so dass $\forall k, l \geq n :\ |a_k - a_l| < \varepsilon$.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{K}$ ein archimedischer Körper und $p \in \mathcal{K}$ mit $|p| < 1$. Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ gegeben durch

$$a_n = \frac{n^5 - 1}{2n^5 - 10n^4 + 20n^3} + |p|^n?$$

Falls ja, was ist der Limes? Falls nicht, gib eine Begründung.

Aufgabe 3. (Einschnürungssatz) Sei $\mathcal{K}$ ein Archimedischer Körper, und seien Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K},$$

so dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Zeige, dass wenn $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m \geq n\ 0 \leq a_m < b_m$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Nullfolge.

Aufgabe 4. Sei $a > 0$ ein Element eines archimedischen Körpers. Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweise: Benutze, dass das geometrische Mittel der Folge $(a, \overbrace{1, ..., 1}^{n-1})$ kleiner oder gleich ihrem arithmetischen Mittel ist (siehe Zentralübung). Behandel die Fälle $a \geq 1$ und $0 < a < 1$ getrennt.

Abgabe ist Montag 29.11.2010 vor der Vorlesung. Die Studenten der Tutorien am Montagmorgen geben ihren Übungszettel bitte bereits während des Tutoriums ab.