MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2010/11

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1. Seien a, b, c, d Elemente eines angeordneten Körpers. Zeige die Rechenregeln:

i) $0 \leq a < b,\ 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$,

ii) $a < b,\ c < 0 \Rightarrow ca > cb$,

iii) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$,

iv) $\forall a,\ a^2 \geq 0$.

v) $0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$,

Aufgabe 2. Gib jeweils ein Beispiel (mit Begründung) für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ (bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$), die keine Nullfolgen sind und erfüllen:

i) $\exists \varepsilon > 0$, so dass $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon$,

ii) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n$, so dass $|b_m| < \varepsilon$,

Aufgabe 3.

i) Beweise mittels vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung: Sei $x \geq -1$ ein Element eines angeordneten Körpers. Zeige, dass $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

ii) Sei $p > 1$ ein Element eines angeordneten Körpers. Zeige, dass die Folge $(p^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 4. i) Zeige, dass die Menge $G = \{0, 1, 2\}$ zusammen mit Addition und Multiplikation gegeben durch

$$a \oplus b = \text{der Rest beim Teilen von } a + b \text{ durch } 3$$
$$a \odot b = \text{der Rest beim Teilen von } ab \text{ durch } 3$$

ein Körper ist.

ii) Zeige, dass die Menge $H = \{0, 1, 2, 3\}$ zusammen mit Addition und Multiplikation gegeben durch

$$a \oplus b = \text{der Rest beim Teilen von } a + b \text{ durch } 4$$
$$a \odot b = \text{der Rest beim Teilen von } ab \text{ durch } 4$$

KEIN Körper ist. (*Hinweis: Hat jedes Element ein Inverses?*)

Abgabe ist Montag 22.11.2010 vor der Vorlesung. Die Studenten der Tutorien am Montagmorgen geben ihren Übungszettel bitte bereits während des Tutoriums ab.