

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeige mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, dass falls eine Primzahl p ein Teiler des Produktes ab ist, p Teiler von a oder von b sein muß.

Hinweis: Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt aus diesem Satz und darf also nicht im Beweis verwendet werden. Begründe mit Hilfe des E.A., dass $\exists k, l \in \mathbb{Z}$ so dass $\text{ggT}(a, b) = ka + lb$.

Aufgabe 2. Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Strecken, und es gelte für die Teilverhältnisse

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Zeige mit Hilfe der folgenden Lemmata, dass für jede beliebig kleine Strecke ε gilt:

$$\alpha + \varepsilon : \beta \neq \gamma : \delta.$$

- i) Zeige mit Hilfe des Strahlensatzes, dass es zu jeder Strecke ε ein Maß $\mu \leq \varepsilon$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\beta = n\mu$.
- ii) Zeige dass es eine Strecke ν gibt die zu β kommensurabel ist und für die $\alpha \leq \nu < \alpha + \varepsilon$ gilt.
- iii) Stelle nun fest, dass $\alpha + \varepsilon : \beta \neq \gamma : \delta$.

Hinweise: Aus der Vorlesung wissen wir: das Teilverhältnis von α zu β ist gleich dem Teilverhältnis von γ zu $\delta \iff \forall m, n \in \mathbb{N}, m\alpha \underset{>}{\leq} n\beta \Rightarrow m\gamma \underset{>}{\leq} n\delta$.

Benutze auch das Archimedische Axiom.

Aufgabe 3. Zeige, dass in einer kommutativen Gruppe G gilt:

- i) $-(0) = 0$
- ii) $\forall a, b \in G$ hat die Gleichung $a + x = b$ eine eindeutige Lösung nämlich $x = b - a$.

Aufgabe 4.

- i) Überprüfe, ob die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ zusammen mit der Verknüpfung \oplus gegeben durch

$$a \oplus b = \text{Der Rest beim Teilen von } a + b \text{ durch } 4$$

eine kommutative Gruppe ist.

- ii) Überprüfe, ob die Menge $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ zusammen mit der Verknüpfung \oplus gegeben durch

$$a \oplus b = \text{Der Rest beim Teilen von } a + b \text{ durch } n$$

eine kommutative Gruppe ist.

Abgabe ist Montag 15.11.2010 vor der Vorlesung. Die Studenten der Tutorien am Montagmorgen geben ihren Übungszettel bitte bereits während des Tutoriums ab.