

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1. i) Zeige, dass die Relation

$$R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$
$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

eine Äquivalenzrelation ist. (*Die Tatsache, dass aus $nx = ny$ für natürliche Zahlen n, x, y bereits $x = y$ folgt, darf ohne Beweis verwendet werden.*)

ii) Das Multiplizieren beider Einträge eines Paares mit einer natürlichen Zahl nennt man erweitern. Zeige, dass zwei Paare genau dann äquivalent sind, wenn sie sich auf dasselbe Paar erweitern lassen.

Zeige also: $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann, wenn es ein drittes Paar $(e, f) \in \mathbb{N}^2$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(na, nb) = (e, f) = (mc, md)$.

iii) Seien α, β kommensurable Strecken und (a, b) ein Teilverhältnis von α und β . Begründe, warum $(c, d) \in TV(\alpha, \beta)$ genau dann, wenn $(a, b) \sim (c, d)$ gilt.

Aufgabe 2. Zeige, dass beim Teilen mit Rest der Dividend stets mehr als doppelt so groß ist wie der Rest.

Aufgabe 3. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von 132 und 78 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Überprüfe, ob der ggT alle Restglieder teilt.

Aufgabe 4. Seien A und B Teilmengen der reellen Zahlen \mathbb{R} . Betrachte die Abbildung

$$f : A \rightarrow B$$
$$x \mapsto x^2.$$

Gib jeweils ein Beispiel für A und B , so dass $f : A \rightarrow B$

i) injektiv, aber nicht surjektiv,

ii) surjektiv, aber nicht injektiv,

iii) bijektiv

ist.

Abgabe ist Montag 8.11.2010 vor der Vorlesung. Die Studenten der Tutorien am Montagmorgen geben ihren Übungszettel bitte bereits während des Tutoriums ab.