

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 2

Aufgabe 1 (Peano-Axiome). Gib jeweils ein Beispiel (mit Begründung) einer Menge, die alle fünf Peano-Axiome außer dem ersten, dritten, vierten bzw. fünften erfüllt.

Aufgabe 2. Beweise die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

i) Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)\dots(k+p) = \frac{n(n+1)\dots(n+p+1)}{p+2}.$$

Welches Resultat aus der Vorlesung wird hiermit verallgemeinert?

ii) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$. (Man berücksichtige dabei das formale Hindernis, dass ein Induktionsbeweis nach der Formulierung des Induktionsaxioms bei 1 beginnt.)

Aufgabe 3. Sei M die Menge aller Menschen. Sind die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch oder transitiv? Begründe!

- i) $A \infty B$, falls A mit B verheiratet ist,
- ii) $A \heartsuit B$, falls A Kind von B ist,
- iii) $A \text{ ☕ } B$, falls beide gern Kaffee trinken,
- iv) $A \text{ ☹ } B$, falls A bei B die Hand in die Badwanne hält,
- v) $A \text{ ☕ } B$, falls A aus derselben Tasse wie B trinkt.

Aufgabe 4 (Kommutativität der Addition). Beweise durch Induktion, dass die Addition natürlicher Zahlen kommutativ ist. (Markiere dabei jedes Gleichheitszeichen farbig, für welches das Assoziativgesetz verwendet wurde.)

Zusatzaufgabe. Wie wir in Aufgabe 3 gesehen haben, ist die folgende Aussage und mithin auch ihr Beweis falsch. Wo liegt der Fehler?

Satz. *Jede symmetrische und transitive Relation \sim auf einer Menge M ist auch reflexiv.*

“*Beweis*“. Sei $x \in M$. Es ist zu zeigen, dass $x \sim x$ gilt. Da die Relation symmetrisch ist, impliziert aber $x \sim y$, dass auch $y \sim x$ richtig ist. Wir haben also $x \sim y$ und $y \sim x$ woraus nach Transitivität $x \sim x$ folgt. \square

Abgabe ist am Mittwoch den 3.11.2010 vor der Vorlesung; Vorlesung und Tutorien fallen am 1.11.2010 aufgrund von Allerheiligen aus. Die Studenten der Tutorien am Dienstag- und Mittwochmorgen geben ihren Übungszettel bitte bereits während des Tutoriums ab.