MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2010/11

# Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

## Blatt 14

**Aufgabe 1.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig genau dann wenn ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ für alle $x, y \in D$. Man beweise die folgenden zwei Aussagen.

i) Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion dessen Ableitung $f'$ beschränkt ist. Zeige, dass $f$ Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ ist.

ii) Sei $D \subset \mathbb{R}$. Jede auf $D$ Lipschitz-stetige Funktion ist auf $D$ gleichmäßig stetig.

**Aufgabe 2.** Gebe mit Begründung die Ableitungen von den Funktionen $\tan(x)$, $a^x$ und $\ln(x)$ an.

**Aufgabe 3.**

i) Von einem rechteckigen Stück Blech mit 16 cm Länge und 10 cm Breite werden an den Ecken kongruente Quadrate ausgeschnitten und aus dem Rest eine Schachtel gebildet. Wie muss man die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate wählen, um eine Schachtel von größtem Rauminhalt zu erhalten?

ii) Sei $k$ eine positive reelle Zahl. Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = k$ gilt: $xy \leq \left(\frac{k}{2}\right)^2$.

**Aufgabe 4.** Ist die Funktion $f(x) := \ln(a^{x^3} + \sin(x) + 1)$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Wenn nicht, auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist sie differenzierbar? Gebe mit Begründung die Ableitung von $f$ an.

*Abgabe ist Montag 07.02.2011 vor der Vorlesung.*