MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2010/11

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 13

Aufgabe 1. Man beweise die folgenden drei Aussagen:

i) Die Funktion cos ist im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. (Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ heißt Arcus-Cosinus geschrieben als $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.)

ii) Die Funktion sin ist im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. (Die Umkehrfunktion von $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ heißt Arcus-Sinus geschrieben als $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.)

iii) Die Funktion $\tan := \frac{\sin}{\cos}$ ist im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. (Die Umkehrfunktion von $\tan : (\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ heißt Arcus-Tangens geschrieben als $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.)

Aufgabe 2. Man beweise für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die $\tan(x)$, $\tan(y)$ und $\tan(x + y)$ definiert sind, das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgabe 3. Man berechne mithilfe der Additionstheoreme die exakten Werte von $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ an den Stellen $x = \pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$.

Aufgabe 4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x)$ die Funktion gegeben durch $f_n(x) = x^n$. Zeige mittels Induktion mithilfe der Produktregel, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ die Ableitung $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Abgabe ist Montag 31.01.2011 vor der Vorlesung.