MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2010/11

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 12

Aufgabe 1.

i) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass $f = g$, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Sei $a \in \mathbb{R}^+$ und sei

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ so dass } \begin{cases} F(1) = a, \\ F(x+y) = F(x)F(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ F \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zeige, dass F eindeutig ist. Welche Funktion erfüllt diese Kriterien?

Aufgabe 2.

i) Gebe die Polarkoordinatendarstellung von $2 - 2i\sqrt{3}$ an.

ii) Gebe $3e^{5i\pi/6}$ in der Form $x + yi$ an.

iii) Berechne $|2e^{3i\pi/8} + 5e^{-15i\pi/8}|$.

iv) Finde die dritte Wurzeln der Zahl $z = 1 + 3i$.

v) Berechne $\frac{-2+5i}{4-2i}$ und $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\sqrt{2}\right)^6$.

vi) Man finde alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$.

Aufgabe 3. Man charakterisiere geometrisch (mit Skizze) diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die die beide Kriterien gelten:

$$|z-2| + |z+2| = 5,$$
$$0 < \mathrm{Re}(iz) < 1.$$

Aufgabe 4. Betrachte die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Berechne $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$.

(Das heisst zeige, dass $\exists b \in \mathbb{C}$ so dass für alle Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(x_n)-1}{x_n} = b$ und gebe b an.)

Abgabe ist Montag 24.01.2011 vor der Vorlesung.