MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2010/11

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man zeige, D ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Cauchy Folge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \in D$.

Aufgabe 2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1/q, & \text{falls } x = \pm p/q \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational oder 0 ist.} \end{cases}$$

Man zeige, dass f in jedem Punkt $a \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup\{0\}$ stetig ist, und dass f in jedem Punkt $b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ unstetig ist.

Aufgabe 3. Zeige, dass wenn $D \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, jede gleichmäßig stetige Funktion:

$$f : D \to \mathbb{R}$$

auch beschränkt ist. (Das heisst es existiert eine reele Zahl r, so dass $\forall d \in D \; f(d) \leq r$.)

Aufgabe 4. Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein abgschlossenes Interval und sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F([a, b]) \subseteq [a, b]$. Man beweise, dass F mindestens einen Fixpunkt hat, das heisst es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $F(x) = x$.

Abgabe ist Montag 17.01.2011 vor der Vorlesung.