MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WiSe 2010/11

Übungen zur Analysis einer Variablen für gymnasiales Lehramt

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x).$$

Man beweise, dass für $|x| < 1 + \frac{1}{2}N$ das Restglied $R_{N+1}(x)$ die folgende Abschätzung hat:

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{P}$ eine endliche Menge von Primzahlen und $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ die Menge aller natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung höchstens Primzahlen aus $\mathcal{P}$ vorkommen. Man beweise, dass

$$\sum_{n \in \mathcal{N}(\mathcal{P})} \frac{1}{n} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Stelle also fest, dass $\sum_{n \in \mathcal{N}(\mathcal{P})} \frac{1}{n}$ eine konvergente Reihe ist.

Hinweis. Benutze die geometrishe Reihe Entwicklung von $(1 - 1/p)^{-1}$.

Aufgabe 3. Zeige, dass die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis. Benutze die Restglied Abschätzung aus Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

i) $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

ii) $\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+1}{2k}\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

iii) $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

iv) $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Abgabe ist Montag 10.01.2011 vor der Vorlesung.