Probestudium 2018
- Übungsblatt 3 -

Prof. Dr. Werner Bley
Dominik Bullach
Martin Hofer
Pascal Stucky

Aufgabe 1 (mittel)
Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ und sei $x \in \mathcal{O}_K$. Zeigen Sie: Falls $N(x)$ eine Primzahl ist, so ist x irreduzibel.

Aufgabe 2 (einfach)
Sei $\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Vergleichen Sie die Einheiten in $\mathbb{Z}[\rho]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Aufgabe 3 (mittel)
Überprüfen Sie, ob die folgenden Elemente irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sind:

(a) 2,

(b) $3 + \sqrt{2}$.

Aufgabe 4 (mittel)
Bestimme alle Teiler von 6 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

Aufgabe 5 (mittel)
Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(a) Zeigen Sie mithilfe von

$$(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 2 \cdot 3 = 6\ ,$$

dass $1 + \sqrt{-5}$ nicht prim in R ist.

(b) Beweisen Sie, dass $1 + \sqrt{-5}$ irreduzibel in R ist.

Lösungsskizzen

Aufgabe 1

Laut Aufgabenstellung gilt $N(x) = p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$. Sei nun $x = yz$ mit $y, z \in \mathcal{O}_K$ eine Faktorisierung von x. Wir müssen nun zeigen, dass y oder z eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist, denn dann ist x nach Definition irreduzibel in $\mathcal{O}_K$. Dazu wenden wir die Normabbildung auf die Gleichung $x = yz$ an und erhalten

$$p = N(x) = N(yz) = N(y) \cdot N(z), \tag{$*$}$$

wobei im letzten Schritt Aufgabe 2 (a) von Blatt 2 verwendet wurde. Die Elemente y und z waren aus dem Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ gewählt, daher ist nach Definition ihre Norm eine ganze Zahl. Aufgrund eindeutiger Primfaktorenzerlegung ganzer Zahlen folgt aus Gleichung $(*)$, dass

$$N(y) = p \quad \text{oder} \quad N(z) = p.$$

Das bedeutet aber gleichzeitig

$$N(z) = 1 \quad \text{oder} \quad N(y) = 1$$

und ein Ergebnis aus der Vorlesung (Satz 2.13 (a)) besagt, dass daraus $z \in \mathcal{O}_K^\times$ oder $y \in \mathcal{O}_K^\times$ folgt.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurden die Einheiten von $\mathbb{Z}[\rho]$ als

$$\mathbb{Z}[\rho]^\times = \{\pm 1, \pm\rho, \pm\rho^2\}$$

bestimmt (vgl. Satz 2.14). Wir bestimmen nun zunächst die Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Sei dazu x eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Wegen $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \subseteq \mathbb{Z}[\rho]$ ist dann x auch eine Einheit in $\mathbb{Z}[\rho]$. Schreiben wir $x = a + b\sqrt{-3}$, so muss nach Satz 2.13 (a) also

$$\pm 1 = N(x) = N(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2$$

gelten. Da die rechte Seite positiv ist, können wir uns auf die Betrachtung der Gleichung $a^2 + 3b^2 = 1$ beschränken.

Angenommen, es ist $b \neq 0$. Da b eine ganze Zahl ist, haben wir dann $b^2 \geq 1$ und es folgt

$$a^2 + 3b^2 \geq 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

im Widerspruch zu $a^2 + 3b^2 = 1$. Es muss daher $b = 0$ gelten und die betrachtete Gleichung vereinfacht sich zu $a^2 = 1$. Die Lösungen davon sind natürlich $a = \pm 1$.

Damit sind ± 1 die einzigen Kandidaten für Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und es ist klar, dass es sich dabei auch tatsächlich um Einheiten handelt. Insgesamt also:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times = \{\pm 1\} \quad \subsetneq \quad \mathbb{Z}[\rho]^\times = \{\pm 1, \pm\rho, \pm\rho^2\}.$$

Aufgabe 3

(a): Wäre 2 irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, so müsste aus $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ folgen, dass $\sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist. Allerdings ist

$$N(\sqrt{2}) = -2 \neq \pm 1.$$

Ein Ergebnis aus der Vorlesung (Satz 2.13 (a)) besagt jedoch, dass $\sqrt{2}$ genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist, wenn die zugehörige Norm $N(\sqrt{2})$ eine Einheit in $\mathbb{Z}$ ist. Da die Einheiten in $\mathbb{Z}$ gerade ± 1 sind, zeigt obige Rechnung, dass $\sqrt{2}$ keine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sein kann. Der Widerspruch zeigt, dass 2 nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist.

(b): Wir berechnen die zugehörige Norm und erhalten:

$$N(3 + \sqrt{2}) = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7.$$

Da 7 eine Primzahl ist, folgt aus Aufgabe 1, dass $3 + \sqrt{2}$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist.

Aufgabe 4

Sei $\alpha = a + b\sqrt{-6} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ ein Teiler von 6, d. h. es gelte $6 = \alpha\beta$ für ein $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Wir wenden auf diese Gleichung die Normabbildung an und erhalten

$$36 = N(6) = N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

Weil die Norm eines Elements aus $Z[\sqrt{-6}]$ immer positiv ist, haben wir daher $N(\alpha) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Wir betrachten nun die Gleichung

$$N(\alpha) = a^2 + 6b^2.$$

Ist $b = 0$, so heißt das $N(\alpha) = a^2$. Das ist nur für $N(\alpha) \in \{1, 4, 9, 36\}$ möglich. Für $N(\alpha) = 4$ ergibt sich $\alpha = \pm 2$ und dementsprechend $\beta = \pm 3$, im Fall $N(\alpha) = 9$ tauschen nur die Bezeichnungen. Die Fälle $N(\alpha) \in \{1, 36\}$ liefern die trivialen Teiler ± 1 und ± 6.

Setzen wir nun also $b \neq 0$ voraus. Dann ist

$$N(\alpha) = a^2 + 6b^2 \geq 0 + 6 \cdot 1 = 6,$$

sodass die Fälle $N(\alpha) \in \{1, 2, 3, 4\}$ unmöglich sind. Auch die Fälle $N(\alpha) \in \{9, 12, 18, 36\}$ sind unmöglich, denn in diesem Fall wäre $N(\beta) \in \{1, 2, 3, 4\}$. Aus $6 = \alpha\beta$ und $b \neq 0$ folgt jedoch, dass auch der Imaginärteil von β nicht verschwinden kann, sodass das gleiche Argument wie oben auch $N(\beta) \notin \{1, 2, 3, 4\}$ zeigt.

Im Fall $N(\alpha) = 6$ muss $a = 0$ sein, sodass $b = \pm 1$, also $\alpha = \pm\sqrt{-6}$. Wegen $N(\beta) = 6$ daher auch $\beta = \pm\sqrt{-6}$.

Insgesamt erhalten wir damit die Kandidaten $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm\sqrt{-6}, \pm 6$. Wegen

$$6 = 1 \cdot 6 = (-1) \cdot (-6) = 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3) = \sqrt{-6} \cdot (-\sqrt{-6})$$

sind dies tatsächlich jeweils Teiler von 6.

Aufgabe 5

(a): Angenommen, $1 + \sqrt{-5}$ wäre prim in R, dann würde die angegebene Gleichung erzwingen, dass

$$(1 + \sqrt{-5}) \mid 2 \quad \text{oder} \quad (1 + \sqrt{-5}) \mid 3.$$

Falls $1 + \sqrt{-5}$ ein Teiler von 2 wäre, müsste es ein Element $a + b\sqrt{-5} \in R$ geben, sodass

$$(1 + \sqrt{-5})(a + b\sqrt{-5}) = 2.$$

Anwenden der Norm liefert

$$N(1 + \sqrt{-5}) \cdot N(a + b\sqrt{-5}) = N(2) \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot N(a + b\sqrt{-5}) = 4.$$

Jedoch ist 6 kein Teiler von 4 in $\mathbb{Z}$, Widerspruch.

Genauso führt man die Aussage $(1 + \sqrt{-5}) \mid 3$ zum Widerspruch. Insgesamt haben wir dann gezeigt, dass $(1 + \sqrt{-5})$ weder ein Teiler von 2 noch von 3 ist. Damit kann $1 + \sqrt{-5}$ kein Primelement sein.

(b): Berechnet man die Norm von $1 + \sqrt{-5}$, so erhält man als Ergebnis

$$N(1 + \sqrt{-5}) = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 1 - (-5) = 6.$$

Falls $(1 + \sqrt{-5}) = xy$ mit $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}$ eine Faktorisierung ist, liefert Anwenden der Norm daher

$$6 = N(1 + \sqrt{-5}) = N(x) \cdot N(y). \tag{$*$}$$

Bemerke, dass die Norm eines Elements $a + b\sqrt{-5}$ wegen $N(a + b\sqrt{-5} = a^2 + 5b^2$ immer positiv ist. Es genügt nun zu zeigen, dass es kein Element der Norm 2 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gibt, denn dann ist

$$N(x) = 1 \quad \text{oder} \quad N(y) = 1$$

die einzige Möglichkeit, um Gleichung $(*)$ zu erfüllen. Dies bedeutet laut Vorlesung (Satz 2.13 (a)) aber gleichzeitig, dass x oder y eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist, und somit, dass $1 + \sqrt{-5}$ irreduzibel ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass $N(x) = 2$ unmöglich ist. Schreibe $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ als $x = a + b\sqrt{-5}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, dann haben wir

$$2 = N(x) = x \cdot \sigma(x) = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$$

Falls $b \neq 0$, so ist $b^2 \geq 1$ und $a^2 + 5b^2 \geq 5$ ist bereits größer als 2. Also muss $b = 0$ sein und uns bleibt

$$2 = a^2$$

übrig. Jedoch ist 2 kein Quadrat in $\mathbb{Z}$, wir in Aufgabe 5 auf Blatt 1 gesehen haben. Die Gleichung $2 = a^2 + 5b^2$ hat also keine Lösung in ganzen Zahlen a und b. Dies schließt den Beweis ab.