§9 Ringe, Polynome

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins.

Definition.

Für $a \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ sei a^n rekursiv definiert durch $a^0 := 1$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

Bemerkung. Für $a, b \in R$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $a^{mn} = (a^m)^n$ und, falls R kommutativ ist, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Definition.

$R^* := \{x \in R : \exists y \in R(xy = yx = 1)\}$. Die Elemente von R^* heißen *Einheiten* von R

Lemma 9.1.

(a) $a, b \in R^* \;\Rightarrow\; ab \in R^*$

(b) R^* mit der induzierten Verknüpfung $(a, b) \mapsto ab$ ist eine Gruppe.

Beweis:

(a) $a, b \in R^* \Rightarrow (\exists c, d \in R)\, ac = ca = 1 \;\&\; bd = db = 1 \Rightarrow (ab)(dc) = ac = 1 \;\&\; (dc)(ab) = db = 1 \Rightarrow ab \in R^*$.

(b) (i) $1 \in R^* \;\&\; \forall a \in R^*(1 \cdot a = a)$. (ii) $a \in R^* \Rightarrow (\exists b \in R)\, ab = ba = 1 \;\Rightarrow\; ba = 1 \;\Rightarrow\; b \in R^* \;\&\; ba = 1$.

Definition. Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *Integritätsring*, wenn gilt:

(i) R ist kommutativ.

(ii) R ist nullteilerfrei, d.h. $\forall x, y \in R(x \neq 0 \;\&\; y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0)$.

(iii) R besitzt ein Einselement $1 \neq 0$.

Bemerkung. In jedem Integritätsring gilt die *Kürzungsregel*: $a \cdot c = b \cdot c \;\&\; c \neq 0 \Rightarrow a = b$.

Definitionen.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien $a, b, a_1, ..., a_n \in R$.

$b|a \;:\Leftrightarrow\; \exists c \in R(a = bc)$ (b ist *Teiler* von a)

Ein Element d von R heißt *gemeinsamer Teiler* von $a_1, ..., a_n$, wenn $d|a_i$ für $i = 1, ..., n$.

Die Menge der gemeinsamen Teiler von $a_1, ..., a_n$ bezeichnen wir mit $gT(a_1, ..., a_n)$.

$a_1, ..., a_n$ heißen *teilerfremd*, wenn $gT(a_1, ..., a_n) \subseteq R^*$ gilt.
(Dann ist sogar $gT(a_1, ..., a_n) = R^*$: $e \in R^* \;\Rightarrow\; ee' = 1 \;\Rightarrow\; a_i = e(e'a_i)$.)

$(a_1, ..., a_n) := \{\sum_{i=1}^n x_i a_i : x_1, ..., x_n \in R\}$ heißt das *von $a_1, ..., a_n$ erzeugte Ideal.*

Definition (Euklidischer Ring)

Ein Integritätsring R heißt *euklidischer Ring*, wenn es eine Abbildung $\mathsf{d} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt:
$\forall a, b \in R \setminus \{0\} \exists q, r \in R\big(a = qb + r \;\&\; (r \neq 0 \Rightarrow \mathsf{d}(r) < \mathsf{d}(b))\big)$.

Satz 9.2.

Ist R ein euklidischer Ring und sind $a_1, ..., a_n \in R$, so existiert ein $b \in R$ mit $(b) = (a_1, ..., a_n)$.

Beweis:

Sei $\mathfrak{a} := (a_1, ..., a_n) \neq \{0\}$. Dann existiert ein $b \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ mit (1) $\forall x \in \mathfrak{a}(x \neq 0 \Rightarrow \mathsf{d}(b) \leq \mathsf{d}(x))$.

Wir zeigen $(b) = \mathfrak{a}$.

1. $(b) \subseteq \mathfrak{a}$ gilt wegen $b \in \mathfrak{a}$.

2. Sei $a \in \mathfrak{a}$. Dann gibt es $q, r \in R$ mit $a = qb + r$ und (2) $(r \neq 0 \Rightarrow \mathsf{d}(r) < \mathsf{d}(b))$. Es ist $r = a - qb \in \mathfrak{a}$. Wegen (1) gilt deshalb $(r \neq 0 \Rightarrow d(b) \leq d(r))$. Mit (2) folgt daraus $r = 0$. Also $a = qb \in (b)$.

Satz 9.3.
Sei R ein euklidischer Ring und seien $a_1, ..., a_n, b \in R$. Dann gilt:
(a) $a_1, ..., a_n$ teilerfremd $\iff$ $1 \in (a_1, ..., a_n)$.
(b) a_i, b teilerfremd für $i = 1, ..., n \implies a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, b teilerfremd.

Beweis:
(a) "$\Leftarrow$": $c \in gT(a_1, ..., a_n)$ & $1 \in (a_1, ..., a_n) \Rightarrow c|1 \Rightarrow c \in R^*$.
"$\Rightarrow$": Nach 9.2 existiert ein $a \in R$ mit $(a) = (a_1, ..., a_n)$.
$a_1, ..., a_n \in (a) \Rightarrow a \in gT(a_1, ..., a_n) \overset{\text{teilerfremd}}{\Rightarrow} a \in R^* \Rightarrow 1 \in (a)$.

(b) Nach Voraussetzung und (a) gibt es $x_1, y_1, ..., x_n, y_n \in R$, so daß $1 = x_i a_i + y_i b$ für $i = 1, ..., n$.
Daraus folgt $1 = (x_1 a_1 + y_1 b) \cdot \ldots \cdot (x_n a_n + y_n b)$ und weiter durch Ausmultiplizieren
$\exists x, z \in R(1 = x \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n + z \cdot b)$, also nach (a) $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, b teilerfremd.

Polynome

Sei K ein Körper.

Definition.
$K^{(\mathbb{N})} := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \exists n \forall i \geq n(\alpha_i = 0)\}$.

Die Elemente von $K^{(\mathbb{N})}$ nennt man *Polynome über K*.

Auf $K^{(\mathbb{N})}$ definiert man *Addition* $+$ und *Multiplikation* $\cdot$ durch

$(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$,

$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) := (c_0, c_1, \ldots)$, wobei $c_k := \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$.

Satz 9.4.
$K^{(\mathbb{N})}$ mit obiger Addition und Multiplikation ist ein kommutativer Ring
mit Nullelement $(0, 0, \ldots)$ und Einselement $(1, 0, 0, \ldots)$.

Diesen Ring bezeichnet man mit $K[t]$ und nennt ihn den *Polynomring über K* in einer Veränderlichen.

Beweis:
Wir weisen nur die Eigenschaften der Multiplikation nach.
Seien $f = (a_i)$, $g = (b_i)$ und $h = (c_i)$ Elementen von $K^{(\mathbb{N})}$.
1. $f \cdot g = (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i})_{k\in\mathbb{N}} = (\sum_{i=0}^{k} b_{k-i} a_i)_{k\in\mathbb{N}} = (\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j})_{k\in\mathbb{N}} = g \cdot f$.
2. $(f \cdot g) \cdot h = (\sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{i} (a_j b_{i-j})\right) c_{k-i})_{k\in\mathbb{N}} = (\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} c_{k-i})_{k\in\mathbb{N}} = (\sum\limits_{j_1+j_2+j_3=k} a_{j_1} b_{j_2} c_{j_3})_{k\in\mathbb{N}} =$
$= (\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} a_i \beta_j c_{k-i-j})_{k\in\mathbb{N}} = (\sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{k-i} b_j c_{k-i-j})_{k\in\mathbb{N}} = f \cdot (g \cdot h)$
3. $f \cdot (g + h) = (\sum_{i=0}^{k} a_i (b_{k-i} + c_{k-i}))_{k\in\mathbb{N}} = (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} + \sum_{i=0}^{k} a_i c_{k-i})_{k\in\mathbb{N}} = f \cdot g + f \cdot h$.
4. $(1, 0, 0, \ldots) \cdot f = (\delta_{0i})_i \cdot (a_i)_i = (\sum_{i=0}^{k} \delta_{0i} a_{k-i})_k = (a_k)_k = f$.

Bemerkung.

Für $a, b \in K$ gilt: $(a,0,0,...) +_{K[t]} (b,0,0,...) = (a+b,0,0,...)$ und $(a,0,0,...) \cdot_{K[t]} (b,0,0,...) = (ab,0,0,...)$.

Wir können deshalb im folgenden $a \in K$ mit $(a,0,0,...) \in K[t]$ identifizieren.

Dadurch wird K zu einem Unterring von $K[t]$.

Definition. $t := (0,1,0,0,\ldots) \in K^{(\mathbb{N})}$

Lemma 9.5.

(a) Für $f = (a_0, a_1, \ldots) \in K[t]$ mit $\forall i > n(a_i = 0)$ gilt $f = \sum_{i=0}^n a_i t^i$.

(Addition und Multiplikation sind hier in $K[t]$ zu verstehen.)

(b) In $K[t]$ gilt: $\sum_{i=0}^n a_i t^i = \sum_{j=0}^m b_j t^j \;\&\; n \le m \implies \forall k \le n(a_k = b_k) \;\&\; \forall k > n(0 = b_k)$.

Beweis:

(a) 1. Durch Induktion nach i erhalten wir $t^i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$:

$t^0 = 1 = (1,0,0,\ldots) = (\delta_{0j})_j$, $t^{i+1} = t^i \cdot t \overset{\text{IH}}{=} (\delta_{ij})_j \cdot (\delta_{1j})_j = (\sum_{j=0}^k \delta_{ij}\delta_{1,k-j})_k = (\delta_{1,k-i})_k = (\delta_{i+1,k})_k$.

Außerdem ist $a \cdot (b_k)_k = (a\delta_{0i})_i \cdot (b_k)_k = (\sum_{i=0}^k a\delta_{0i} b_{k-i})_k = (ab_k)_k$.

Für $f = (a_i)_i$ mit $\forall i > n(a_i = 0)$ gilt deshalb $f = \sum_{i=0}^n (a_i \delta_{ij})_j = \sum_{i=0}^n a_i t^i$.

(b) Sei $\sum_{i=0}^n a_i t^i = \sum_{i=0}^m b_i t^i \;\&\; n \le m$. Wir setzen $a_i := 0$ für $i > n$, und $b_i := 0$ für $i > m$.

Dann $(a_i)_i \overset{\text{(b)}}{=} \sum_{i=0}^n a_i t^i = \sum_{i=0}^m b_i t^i \overset{\text{(b)}}{=} (b_i)_i$ und folglich $a_i = b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Definition (Der Grad eines Polynoms).

Für $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K[t]$ sei $\deg(f) := \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} & \text{falls } f \neq 0 \\ -\infty & \text{falls } f = 0 \end{cases}$ *(Grad von f)*

Ist $f \neq 0$ und $n = \deg(f)$, so heißt a_n der *Leitkoeffizient* von f, und f heißt normiert, falls $a_n = 1$ ist.

Für $\xi \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ sei $\xi + (-\infty) := (-\infty) + \xi := -\infty$.

Lemma 9.6. $f, g \in K[t] \;\Rightarrow\; \deg(f+g) \le \max\{\deg(f), \deg(g)\}$ und $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

Beweis:

Für $f = 0 \vee g = 0$ ist die Behauptung trivial.

Sei jetzt $f = (a_i)_i$, $g = (b_i)_i$ mit $\deg(f) = m \in \mathbb{N}$ und $\deg(g) = n \in \mathbb{N}$.

Dann $\forall k > \max\{m,n\}(a_k + b_k = 0)$ und $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \begin{cases} a_m b_n \neq 0 & \text{für } k = m+n \\ 0 & \text{für } k > m+n \end{cases}$.

Folgerung.

$K[t]$ ist nullteilerfrei und somit ein Integritätsring.

Satz 9.7.

Zu $f, g \in K[t]$ mit $g \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$ derart,
daß $f = q{\cdot}g + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

Beweis:

Eindeutigkeit: Gelte $q{\cdot}g + r = q'{\cdot}g + r'$ und $\deg(r), \deg(r') < \deg(g)$.

Dann $r' - r = (q - q'){\cdot}g$ und $\deg(r - r') < \deg(g)$. Aus $q \neq q'$ würde deshalb $\deg(r - r') < \deg(g) \overset{!!!}{\le} \deg(q - q') + \deg(g) \overset{\text{L.9.6}}{=} \deg((q - q'){\cdot}g) = \deg(r - r')$ folgen. Also ist $q = q'$ und damit auch $r = r'$.

Existenz: Durch Rekursion nach $\deg(f)$ definieren wir Polynome $[\frac{f}{g}]$ und r, so daß $f = [\frac{f}{g}]\cdot g + r$ und $\deg(r) < m := \deg(g)$.

1. $\deg(f) < m$: $r := f$, $[\frac{f}{g}] := 0$.

2. $m \le \deg(f)$: $f = \sum_{i=0}^n a_i t^i$, $g = \sum_{i=0}^m b_i t^i$ mit $m \le n$ und $a_n, b_m \ne 0$. Sei $f' := f - g\cdot\frac{a_n}{b_m}\cdot t^{n-m}$.

Dann $\deg(f') < n$, und nach I.V. existieren $[\frac{f'}{g}]$ und r mit $f' = [\frac{f'}{g}]\cdot g + r$ und $\deg(r) < m$.

Es folgt $f = f' + g\cdot\frac{a_n}{b_m}\cdot t^{n-m} = (\frac{a_n}{b_m}t^{n-m} + [\frac{f'}{g}])\cdot g + r$. Also $[\frac{f}{g}] = \frac{a_n}{b_m}t^{n-m} + [\frac{f'}{g}]$.

Folgerung. $K[t]$ ist ein euklidischer Ring.

Beispiel zur Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
3t^5 - 2t^4 + t^3 - 5t^2 + 1 : t^3 + t^2 - 2t = 3t^2 - 5t + 12 \text{ Rest } -27t^2 + 24t + 1 \\
3t^5 + 3t^4 - 6t^3 \\
\quad - 5t^4 + 7t^3 \\
\quad - 5t^4 - 5t^3 + 10t^2 \\
\qquad\qquad 12t^3 - 15t^2 \\
\qquad\qquad 12t^3 + 12t^2 - 24t \\
\qquad\qquad\quad - 27t^2 + 24t + 1
\end{array}
$$

Allgemeines Schema:

$$
\begin{array}{l}
a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_{n-m}t^{n-m} + \ldots + a_1 t + a_0 \ : \ b_m t^m + \ldots + b_0 = \frac{a_n}{b_m}t^{n-m} + \ldots.. \\
\underline{a_n t^n + b_{m-1}\frac{a_n}{b_m}t^{n-1} + \ldots + b_0\frac{a_n}{b_m}t^{n-m}} \\
\qquad\qquad c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_{n-m}t^{n-m} + \ldots + a_1 t + a_0 \qquad \text{wobei } c_{n-i} := a_{n-i} - b_{m-i}\frac{a_n}{b_m}
\end{array}
$$

Definitionen.

Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in K[t]$ und $\lambda \in K$.

$f(\lambda) := \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$ nennt man das Ergebnis der *Einsetzung* von λ in f.

λ heißt *Nullstelle von* f, wenn $f(\lambda) = 0$ ist.

f heißt *konstant*, wenn $\deg(f) \le 0$ ist.

Bemerkung.

$f \in K[t]$ ist genau dann konstant, wenn $f = a_0 \in K$. In diesem Fall gilt $f(\lambda) = a_0$ für alle $\lambda \in K$.

Lemma 9.8.

Für $f, g \in K[t]$ und $\lambda \in K$ gilt: $(f+g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$ und $(f\cdot g)(\lambda) = f(\lambda)\cdot g(\lambda)$.

Beweis des zweiten Teils:

Sei $f = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ und $g = \sum_{i=0}^n b_i t^i$. Ferner $c_k := \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$. Dann gilt: $f(\lambda)\cdot g(\lambda) =$

$= (\sum_{i=0}^m a_i\lambda^i)\cdot(\sum_{i=0}^n b_i\lambda^i) = \sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^n a_i b_j \lambda^{i+j} = \sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{i+j=k} a_i b_j)\lambda^k = \sum_{k=0}^{m+n} c_k\lambda^k = (f\cdot g)(\lambda)$.

Lemma 9.9.

Ist $\lambda \in K$ eine Nullstelle von $f \in K[t]$, so existiert ein $q \in K[t]$ mit $f = q\cdot(t-\lambda)$.

Beweis :

Nach 9.7 existieren $q, r \in K[t]$ mit $f = q\cdot(t-\lambda) + r$ und $\deg(r) < \deg(t-\lambda) = 1$.

Dann $0 = f(\lambda) = r(\lambda)$ und $\deg(r) \le 0$, also $r = 0$.

Definition.

Für $f \in K[t] \setminus \{0\}$ und $\lambda \in K$ sei

$\mu(f;\lambda) := \max\{r \in \mathbb{N} : \exists g \in K[t](f = (t-\lambda)^r \cdot g)\}$.

Ist λ eine Nullstelle von f, so heißt $\mu(f;\lambda)$ die *Vielfachheit der Nullstelle λ von f.*

Bemerkung. Nach 9.6 und 9.9 gilt: $f(\lambda) = 0 \Rightarrow 1 \leq \mu(f;\lambda) \leq \deg(f)$.

Lemma 9.10.

Für $f \in K[t] \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{N}$ gilt: $r = \mu(f;\lambda) \Leftrightarrow \exists g(f = (t-\lambda)^r \cdot g \;\&\; g(\lambda) \neq 0)$.

Beweis :

"$\Rightarrow$" folgt aus der Definition von $\mu(f;\lambda)$ mittels Lemma 9.9.

"$\Leftarrow$": Sei $f = (t-\lambda)^r \cdot g$ mit $g(\lambda) \neq 0$. Dann ist $r \leq \mu := \mu(f;\lambda)$ und $f = (t-\lambda)^\mu \cdot q$ für ein $q \in K[t]$.
Aus $(t-\lambda)^r \cdot g = f = (t-\lambda)^\mu \cdot q$ folgt $g = (t-\lambda)^{\mu-r} \cdot q$ und weiter $r = \mu$ wegen $g(\lambda) \neq 0$.

Satz 9.11.

Sind $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die verschiedenen Nullstellen von $f \in K[t] \setminus \{0\}$ so existiert ein $g \in K[t]$ mit

(i) $f = (t-\lambda_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{\mu_k} \cdot g$, wobei $\mu_i := \mu(f;\lambda_i)$ $(i = 1, ..., k)$,

(ii) g hat keine Nullstelle.

Ist g konstant, so sagt man *"f zerfällt in Linearfaktoren"*.

Beweis durch Induktion nach k:

Nach 9.10 existiert $h \in K[t] \setminus \{0\}$ mit $f = (t-\lambda_1)^{\mu_1} \cdot h$ und $h(\lambda_1) \neq 0$.

Offenbar sind dann $\lambda_2, ..., \lambda_k$ die Nullstellen von h.

Fall 1: $k = 1$. Dann hat h keine Nullstellen und wir sind fertig.

Fall 2: $k > 1$. Nach I.V. existiert g ohne Nullstellen, so daß $h = (t-\lambda_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{\nu_k} \cdot g$, wobei $\nu_i := \mu(h;\lambda_i)$. Es folgt $f = (t-\lambda_1)^{\mu_1} \cdot (t-\lambda_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{\nu_k} \cdot g$ und daraus mit 9.10 $\nu_i = \mu(f;\lambda_i)$.

Folgerung.

Ist $f \in K[t]$ und $\deg(f) = n \geq 0$, so hat f höchstens n verschiedene Nullstellen.

Lemma 9.12.

Ist K unendlich, so gilt: $f, g \in K[t] \;\&\; \forall\lambda \in K(f(\lambda) = g(\lambda) \Rightarrow f = g)$.

Beweis:

Nach Voraussetzung hat $f - g$ unendlich viele Nullstellen; nach obiger Folgerung ist also $f - g = 0$.

Bemerkung

Ist $K = \{a_0, ..., a_n\}$, so ist $f := (t-a_0) \cdot ... \cdot (t-a_n) \in K[t]$ vom Nullpolynom verschieden,
aber trotzdem $f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in K$.

§10 Eigenwerte

Definition

Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathsf{End}(V)$ und $\lambda \in K$.

1. λ heißt *Eigenwert* von f, wenn es ein $v \neq 0$ aus V mit $f(v) = \lambda v$ gibt.
2. Ist λ Eigenwert von f, so heißt jedes $v \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$ ein *Eigenvektor von f zum Eigenwert* λ.
3. $\mathrm{Eig}(f; \lambda) := \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ heißt *Eigenraum* von f bzgl. λ.

Bemerkungen.

(i) $\mathrm{Eig}(f; \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörigen Eigenvektoren von f.

(ii) λ ist Eigenwert von $f \iff \mathrm{Eig}(f; \lambda) \neq \{0\}$.

(iii) $\mathrm{Eig}(f; \lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$, insbesondere $\mathrm{Eig}(f_A; \lambda) = \mathrm{Lös}(A - \lambda \cdot E_n; 0)$ für $A \in K^{n \times n}$.

Beweis von (iii): $v \in \mathrm{Eig}(f; \lambda) \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = 0$.

Satz 10.1.

Ist $\dim(V) < \infty$, so gilt für $f \in \mathsf{End}(V)$ und $\lambda \in K$: λ Eigenwert von $f \iff \det(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$.

Beweis :

λ ist EW $\overset{\text{(ii)+(iii)}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda\, \mathrm{id}$ ist nicht injektiv $\overset{8.11a}{\Leftrightarrow} \det(f - \lambda\, \mathrm{id}) = 0$.

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \notin \{n \cdot \pi : n \in \mathbb{Z}\}$. Anschaulich ist klar, daß f_A keinen Eigenwert hat.

2. $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. Spiegelung an der Geraden mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$.

Eigenvektoren:

$v_1 := (\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$,

$v_2 := (-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2})$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

$\overline{v} = (v_1, v_2)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $V = \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$ der unendlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf I beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

Der Endomorphismus $f : V \to V$, $\varphi \mapsto \varphi'$ hat jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ als Eigenwert, denn die Funktion $\varphi_\lambda : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\lambda x}$ ist Eigenvektor zu λ. $[\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}]$

Satz 10.2.

Sind $\lambda_1, ..., , \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $f \in \mathsf{End}(V)$, so gilt:

(a) Ist v_i Eigenvektor von λ_i $(i = 1, ..., k)$, so ist das Tupel $(v_1, ..., v_k)$ linear unabhängig.

(b) Die Summe $\mathrm{Eig}(f; \lambda_1) + \ldots + \mathrm{Eig}(f; \lambda_k)$ ist direkt.

Beweis :

(a) Induktion nach k:

1. $k = 1$: v_1 linear unabhängig, denn v_1 ist Eigenvektor und damit ungleich 0.
2. $k > 1$: Nach IV sind $v_1, ..., v_{k-1}$ linear unabhängig. Sei nun $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$. Durch Anwenden von f bzw.

durch Multiplikation mit λ_k erhalten wir daraus $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\lambda_i v_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\lambda_k v_i = 0$. Durch Subtraktion folgt $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k)v_i = 0$ und daraus mit IV $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ für $i = 1, ..., k{-}1$.
Wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ für $i = 1, ..., k{-}1$ folgt nun $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$, also auch $\alpha_k v_k = 0$ und damit $\alpha_k = 0$.

(b) Sei $u_1 + ... + u_k = 0$ mit $u_i \in Eig(f; \lambda_i)$ für $i = 1, ..., k$. Z.z.: $u_1 = ... = u_k = 0$.
Annahme: $\exists i \in \{1, ..., k\}(u_i \neq 0)$. Dann o.E.d.A. $u_1, ..., u_r \neq 0$ und $u_{r+1} = ... = u_k = 0$ mit $1 \leq r \leq k$. Also sind $u_1, ..., u_r$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und somit nach (a) $(u_1, ..., u_r)$ linear unabhängig, woraus $u_1 + ... + u_r \neq 0$ und weiter $u_1 + ... + u_k \neq 0$ folgt. *Widerspruch.*

Definition. Sei $A \in K^{n\times n}$.
λ [bzw. v] heißt Eigenwert [bzw. Eigenvektor] von $A :\Leftrightarrow \lambda$ [bzw. v] ist Eigenwert [bzw. Eigenvektor] von f_A.
$\mathrm{Eig}(A; \lambda) := \mathrm{Eig}(f_A; \lambda)$ heißt Eigenraum von A bzgl. λ.

Das charakteristische Polynom

Vorbemerkung. Große Teile von §8 (insbesondere die Lemmata und Sätze 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9a, 8.13, 8.14, 8.15) bleiben gültig, wenn man von K lediglich voraussetzt, daß es sich um einen kommutativen Ring mit Einselement handelt. (Der Beweis von 8.7c muß dann allerdings etwas modifiziert werden. Das machen wir später.) Insbesondere können wir anstelle von K den Polynomring $K[t]$ nehmen (über dem Körper K). Damit haben wir dann auch die Determinante $\det(\mathcal{Q})$ für Matrizen $\mathcal{Q} = (Q_{ij})_{ij} \in K[t]^{n\times n}$ und die erwähnten Sätze darüber zur Verfügung: $\det(\mathcal{Q}) = \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\pi)Q_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot Q_{n\pi(n)}$.

Definition.
Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ sei $P_A := \det(A - t{\cdot}E) := \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\pi)Q_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot Q_{n\pi(n)} \in K[t]$,
wobei $Q_{ij} := a_{ij} - t{\cdot}\delta_{ij} \in K[t]$.

P_A heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A. Offenbar gilt: $\deg(P_A) = n$.

Lemma 10.3.
(a) Für $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ gilt: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda{\cdot}E_n)$.
(b) Sind $A, B \in K^{n\times n}$ darstellende Matrizen von $f \in \mathsf{End}(V)$, so ist $P_A = P_B$.

Beweis:
(a) Sei $Q_{ij} := a_{ij} - t{\cdot}\delta_{ij} \in K[t]$. Dann $P_A(\lambda) = \det(A - t{\cdot}E)(\lambda) = (\sum_\pi \mathrm{sign}(\pi)Q_{1\pi(1)} \cdots Q_{n\pi(n)})(\lambda) \overset{\text{L.9.8}}{=}$
$= \sum_\pi \mathrm{sign}(\pi)Q_{1\pi(1)}(\lambda) \cdots Q_{n\pi(n)}(\lambda) \overset{\text{L.9.8}}{=} \sum_\pi \mathrm{sign}(\pi)(a_{1\pi(1)} - \lambda\delta_{1\pi(1)}) \cdots (a_{n\pi(n)} - \lambda\delta_{n\pi(n)}) = \det(A - \lambda E)$.
(b) Nach dem Korollar zu Satz 7.7 existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n; K)$ mit $B = SAS^{-1}$. Dann $P_B = \det(B - t{\cdot}E) =$
$= \det(SAS^{-1} - S(tE)S^{-1}) = \det(S(A - tE)S^{-1}) = \det(S){\cdot}\det(A - tE){\cdot}\det(S^{-1}) = \det(A - tE) = P_A$.

Definition.
Für $f \in \mathsf{End}(V)$ $(\dim(V) < \infty)$ sei $P_f := P_A$, wobei A eine darstellende Matrix von f.
P_f heißt *charakteristisches Polynom* des Endomorphismus f.

Bemerkung.
(a) $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda{\cdot}\mathrm{id}_V)$.
(b) λ ist Nullstelle von $P_f \iff \lambda$ ist Eigenwert von f.

Beweis:
(a) $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) \overset{10.3a}{=} \det(A - \lambda E) \overset{(*)}{=} \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$. [$(*)$ $A - \lambda E$ ist darstellende Matrix von $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$.]
(b) folgt aus (a) und 10.1.

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. $P_A = (\cos\alpha - t)^2 + \sin^2\alpha = t^2 - 2t\cos\alpha + 1$.

Nullstellen von P_A: $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}) = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$.

Im Fall $|\cos\alpha| < 1$ (d.h. wenn $\alpha \notin \{n \cdot \pi : n \in \mathbb{Z}\}$) besitzt A also keinen (reellen) Eigenwert.

2. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

$P_A = (\cos\alpha - t)(-\cos\alpha - t) - \sin^2\alpha = -(\cos^2\alpha - t^2) - \sin^2\alpha = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$.

A hat somit die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Eigenvektoren: Sei $\beta := \frac{\alpha}{2}$.

λ_1: $\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta - \sin^2\beta - 1 & 2\sin\beta\cos\beta \\ 2\sin\beta\cos\beta & -\cos^2\beta + \sin^2\beta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin^2\beta & 2\sin\beta\cos\beta \\ 2\sin\beta\cos\beta & -2\cos^2\beta \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} -\sin^2\beta\cos\beta & \sin\beta\cos^2\beta \\ \sin^2\beta\cos\beta & -\sin\beta\cos^2\beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\sin^2\beta\cos\beta & \sin\beta\cos^2\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $v_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$.

λ_2: $\begin{pmatrix} \cos\alpha + 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta - \sin^2\beta + 1 & 2\sin\beta\cos\beta \\ 2\sin\beta\cos\beta & -\cos^2\beta + \sin^2\beta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\beta & 2\sin\beta\cos\beta \\ 2\sin\beta\cos\beta & 2\sin^2\beta \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} \sin\beta\cos^2\beta & \sin^2\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos^2\beta & \sin^2\beta\cos\beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sin\beta\cos^2\beta & \sin^2\beta\cos\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. $P_A = (-1-t)(4-t) + 6 = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$.

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Eig}(A;1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A = -t \cdot \det\begin{pmatrix} -2-t & 3 \\ -2 & 3-t \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3-t \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2-t & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= -t(t^2 - t) + 3(t-1) - 2(t-1) = -t^3 + t^2 + t - 1 = -(t-1)^2(t+1).$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Eigenräume:

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Eig}(A;1) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\} = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

$\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{Eig}(A;-1) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ \&\ 2x_2 - 3x_3 = 0\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Abkürzung. $Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) := (\lambda_i \delta_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Lemma 10.4.

(a) Seien $f \in \mathsf{End}(V)$, $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Dann gilt:
$\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \iff \forall j \in \{1, .., n\}(\, v_j$ ist Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_j).

(b) Seien $A, S \in K^{n\times n}$, $v_1, ..., v_n$ die Spalten von S und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Dann gilt:
$A{\cdot}S = S{\cdot}Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \iff \forall j \in \{1, .., n\}(\, v_j$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j).

Beweis:

(a) Nach Definition von $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ gilt: $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, .., n\}(f(v_j) = \lambda_j v_j)$.

(b) Die Behauptung folgt aus $A{\cdot}S = (Av_1 \, \dots \, Av_n)$ und $S{\cdot}Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (\lambda_1 v_1 \, \cdots \, \lambda_n v_n)$.

Definition.

Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar*, falls $f_A : K^n \to K^n$ diagonalisierbar ist.

Lemma 10.5.

(a) $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ gibt,
so daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Hat $f \in \mathsf{End}(V)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ($n = \dim V$), so ist f diagonalisierbar.

Beweis :

(a) "$\Rightarrow$": Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren von f_A und seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Für $S := (v_1 \, \dots \, v_n)$ gilt dann: $A{\cdot}S = S{\cdot}Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (nach 10.4b) und S invertierbar (nach 6.1).
"$\Leftarrow$": Sei $S = (v_1 \, \dots \, v_n)$ invertierbar und $S^{-1}AS = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von K^n (nach 6.1), und nach 10.4b gilt: v_j ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_j ($j = 1, ..., n$).

(b) Für $j = 1, ..., n$ sei jeweils v_j ein Eigenvektor von f zu λ_j. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ nach 10.2a eine Basis.

Satz 10.6.

Sind $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von $f \in \mathsf{End}(V)$ und ist $\dim(V) < \infty$, so sind äquivalent:

(i) f diagonalisierbar

(ii) $V = \mathrm{Eig}(f; \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(f; \lambda_k)$

(iii) $\dim(V) = \dim \mathrm{Eig}(f; \lambda_1) + ... + \dim \mathrm{Eig}(f; \lambda_k)$.

Beweis :

1. (i) $\Leftrightarrow$ V besitzt Erzeugendensystem aus Eigenvektoren $\Leftrightarrow$ $V = \mathrm{Eig}(f; \lambda_1) + \ldots + \mathrm{Eig}(f; \lambda_k) \overset{10.2d}{\Leftrightarrow}$ (ii).

2. Sei $U_i := \mathrm{Eig}(f; \lambda_i)$ und $U := U_1 + \ldots + U_k$. Nach 10.2d und 4.12 (Korollar) gilt dann $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ und $\dim(U) = \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_k)$. Folglich: (ii) $\Leftrightarrow V = U \overset{4.10b}{\Leftrightarrow} \dim(V) = \dim(U) \Leftrightarrow$ (iii).

Definition. Ist λ Eigenwert des Endomorphismus $f : V \to V$, so definiert man:

Geometrische Vielfachheit von $\lambda := \dim(Eig(f; \lambda))$,

algebraische Vielfachheit von $\lambda := \mu(P_f; \lambda)$ (Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von f)

Satz 10.7.
Ist $\dim(V) = n < \infty$ und $f \in \mathsf{End}(V)$, so gilt:

(a) Für jeden Eigenwert λ von f ist $\dim \mathrm{Eig}(f;\lambda) \leq \mu(P_f;\lambda)$.

(b) f diagonalisierbar $\iff \begin{cases} \text{Das charakteristische Polynom } P_f \text{ zerfällt in Linearfaktoren und} \\ \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda) = \mu(P_f;\lambda) \text{ für jeden Eigenwert } \lambda \text{ von } f. \end{cases}$

Beweis :

(a) Wir wählen eine Basis $\overline{v} := (v_1, ..., v_n)$ von V, so daß $(v_1, ..., v_k)$ Basis von $\mathrm{Eig}(f;\lambda)$ ist. Sei $A := \mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$.

Dann $A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ & 0 & & A' \end{pmatrix}$, $\quad A - t{\cdot}E_n = \begin{pmatrix} \lambda - t & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda - t & \\ & 0 & & A' - t{\cdot}E_{n-k} \end{pmatrix}$ mit $A' \in K^{n-k \times n-k}$.

Es folgt $P_f = \det(A - t{\cdot}E_n) = (\lambda - t)^k {\cdot} \det(A' - t{\cdot}E_{n-k}) = (\lambda - t)^k {\cdot} P_{A'}$ und somit $\dim \mathrm{Eig}(f;\lambda) = k \leq \mu(P_f;\lambda)$.

(b) Seien $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von f (i.e. Nullstellen von P_f), und sei $\mu_i := \mu(P_f;\lambda_i)$.

Nach 9.11 ist $P_f = (t - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot g$ und somit $n = \deg(P_f) = \mu_1 + ... + \mu_k + \deg(g)$.

Daraus folgt: (1) $\mu_1 + \ldots + \mu_k \leq n$,

(2) P_f zerfällt in Linearfaktoren $\iff n = \mu_1 + \ldots + \mu_k$.

Nach 10.6 gilt: (3) f diagonalisierbar $\iff n = \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda_1) + \ldots + \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda_k)$.

Aus (1)-(3) und (a) folgt die Behauptung.

Bemerkung.
Ist $A \in K^{n \times n}$ eine darstellende Matrix von $f \in \mathsf{End}(V)$, so gilt $\dim \mathrm{Eig}(f;\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(A;\lambda)$.

Beweis:

Sei $A = \mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$. Dann $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\} = \{\Phi_{\overline{v}}(x) : x \in K^n \ \& \ f(\Phi_{\overline{v}}(x)) = \lambda \Phi_{\overline{v}}(x)\} =$
$= \{\Phi_{\overline{v}}(x) : x \in K^n \ \& \ \Phi_{\overline{v}}(f_A(x)) = \Phi_{\overline{v}}(\lambda x)\} = \{\Phi_{\overline{v}}(x) : x \in K^n \ \& \ f_A(x) = \lambda x\} = \Phi_{\overline{v}}(\mathrm{Eig}(A;\lambda))$.

Definition.
$A, B \in K^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix S mit $B = S^{-1}AS$ gibt.

Lemma 10.8.

(a) "ähnlich" ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$.

(b) $A, B \in K^{n \times n}$ sind genau dann ähnlich, wenn es eine Basis $\overline{v}$ von K^n mit $B = \mathcal{M}_{\overline{v}}(f_A)$ gibt.

(c) Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich,
wenn sie darstellende Matrizen desselben Endomorphismus sind.

(d) Sind $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, so ist $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$, $\det(A) = \det(B)$ und $P_A = P_B$.

Beweis:

(a) klar. (b) Satz 7.2. (c) Korollar zu Satz 7.7. (d) Lemma 8.12, Satz 8.10, Lemma 10.3b.

Lemma 10.9.

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{n\times n}$ und $P_A = \sum_i \alpha_i t^i$. Dann gilt:

(a) $\deg(P_A) = n$.

(b) $\alpha_n = (-1)^n$.

(c) $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})$.

(d) $\alpha_0 = \det(A)$.

(e) P_A zerfällt $\Longrightarrow$ $(\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in K)\, P_A = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$.

Beweis:

(a),(b),(c) Sei $\mathcal{S}'_n := \mathcal{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$. Dann $P_A = \det(A - t{\cdot}E) = (a_{11} - t) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - t) + P'$ mit $P' := \sum_{\pi\in\mathcal{S}'_n} \mathrm{sign}(\pi){\cdot}Q_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot Q_{n\pi(n)}$ und $Q_{ij} = \begin{cases} a_{ii} - t & \text{falls } i = j \\ a_{ij} & \text{sonst} \end{cases}$.

$\deg(P') = \max\{\sum_{i=1}^n \deg(Q_{i\pi(i)}) : \pi \in \mathcal{S}'_n\} \leq n - 2$ (O.E.d.A. $n \geq 2$).

$\deg((a_{11} - t) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - t)) = \deg(a_{11} - t) + \ldots + \deg(a_{nn} - t) = n$.

Sei $(a_{11} - t) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - t) = \sum_{i=1}^n \beta_i t^i$. Dann $\alpha_n = \beta_n = (-1)^n$, $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})$.

(d) $\alpha_0 = P_A(0) = \det(A - 0{\cdot}E) = \det(A)$.

(e) Nach Voraussetzung ist $P_A = (\widetilde{\lambda}_1 - t)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\widetilde{\lambda}_k - t)^{\mu_k} \cdot a$ mit $a \in K \setminus \{0\}$ und $\mu_1 + ... + \mu_k = \deg(P_A) \overset{(a)}{=} n$. Daraus folgt $P_A = a \cdot \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$ für passende $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, sowie $(-1)^n \overset{(b)}{=} \alpha_n = (-1)^n a$, also $a = 1$.

Beweis von 8.7c: $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$, falls A, B quadratisch.

Sei A fest.

Wir definieren $d : K^{l\times l} \to K$, $d(B) := \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. d ist offenbar multilinear und alternierend.

Nach 8.5c gilt deshalb $d(B) = d(E) \cdot \det(B) = \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \det(B)$.

Durch l-fache Anwendung des Entwicklungssatzes 8.14 erhält man $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det(A)$.

§11 Die Jordansche Normalform

Im folgenden sei V stets ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

Definition.

Sei $f \in \mathsf{End}(V)$ und U eine Unterraum von V.

U heißt *f-invariant*, wenn $f(U) \subseteq U$ ist.
In diesem Fall bezeichnet $f|U$ den durch $(f|U)(v) := f(v)$ definierten Endomorphimus von U.

Lemma 11.1.

Ist $f \in \mathsf{End}(V)$ und U ein f-invarianter Unterraum von V, so ist $P_{f|U}$ ein Teiler von P_f.

Beweis:

Sei $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ Basis von V und $1 \leq k \leq n$, so daß $\overline{u} := (v_1, ..., v_k)$ Basis von U. Sei ferner $m := n - k$.
Dann gilt: $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ mit $A = \mathcal{M}_{\overline{u}}(f|U)$, $P_{f|U} = \det(A - t{\cdot}E_k)$, $P_f = \det(\begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} - t{\cdot}E_n) =$
$\det\begin{pmatrix} A - t{\cdot}E_k & * \\ \mathbf{0} & B - t{\cdot}E_m \end{pmatrix} = \det(A - t{\cdot}E_k) \cdot \det(B - t{\cdot}E_m) = P_{f|U} \cdot \det(B - t{\cdot}E_m)$.

Definition.

$f \in \mathsf{End}(V)$ heißt *trigonalisierbar*, wenn es eine Basis $\overline{v}$ von V gibt, so daß $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ obere Dreiecksmatrix ist.

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt trigonalisierbar, wenn $f_A : K^n \to K^n$ trigonalisierbar ist.

Lemma 11.2.

Sei $f \in \mathsf{End}(V)$, $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, und $V_j := \operatorname{span}(v_1, ..., v_j)$ für $j = 1, ..., n$.

Dann gilt: $f(V_j) \subseteq V_j$ für $j = 1, ..., n \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

Beweis :

Sei $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann gilt: $f(V_j) \subseteq V_j$ $(j = 1, ..., n)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f(v_1), ..., f(v_j) \in \operatorname{span}(v_1, ..., v_j)$ $(j = 1, ..., n)$ $\Leftrightarrow$ $f(v_j) \in \operatorname{span}(v_1, ..., v_j)$ $(j = 1, ..., n)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \in \operatorname{span}(v_1, ..., v_j)$ $(j = 1, ..., n)$ $\Leftrightarrow$ $a_{j+1,j} = ... = a_{nj} = 0$ $(j = 1, ..., n)$.

Lemma 11.3.

Sei $f \in \mathsf{End}(V)$ und v_1 ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1.
Sei $V_1 := \operatorname{span}(v_1)$ und W ein Unterraum von V, so daß $V = V_1 \oplus W$.
Sei $h \in \operatorname{Hom}(W, V_1)$ und $g \in \operatorname{Hom}(W, W)$, so daß $f(w) = h(w) + g(w)$ für alle $w \in W$.

Dann gilt:

(a) Ist $\overline{w} = (v_2, ..., v_n)$ eine Basis von W und $\overline{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, so $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & \mathcal{M}_{\overline{w}}(g) \end{pmatrix}$.

(b) $P_f = (\lambda - t){\cdot}P_g$.

Beweis:

(a) Sei $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Für $j = 2, ..., n$ gilt dann $f(v_j) = \overbrace{a_{1j}v_1}^{\in V_1} + \overbrace{a_{2j}v_2 + \ldots + a_{nj}v_n}^{\in W}$
und deshalb $h(v_j) = a_{1j}v_1$ und $g(v_j) = a_{2j}v_2 + \ldots + a_{nj}v_n$.

Somit $\quad \mathcal{M}_{\overline{w}}(g) = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(b) Wir wählen eine Basis $\overline{w} = (v_2, ..., v_n)$ von W und setzen $\overline{v} := (v_1, v_2, ..., v_n)$, sowie $B := \mathcal{M}_{\overline{w}}(g)$.
Dann gilt $P_f \overset{(a)}{=} (\lambda_1 - t) \cdot \det(B - t{\cdot}E_{n-1}) = (\lambda_1 - t){\cdot}P_g$.

Satz 11.4 (Trigonalisierungssatz).
Gilt $\dim(V) = n$, $f \in \mathsf{End}(V)$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, so sind äquivalent:

(i) V besitzt eine Basis $\overline{v}$, so daß $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ist.
(ii) $P_f = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$.

Beweis :
(i)⇒(ii): Sei $A := \mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$. Dann $P_f = \det(A - t{\cdot}E) = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$.

(ii)⇒(i): Induktion nach n: Sei $n \geq 2$ und v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1.
Sei $V_1 := \operatorname{span}(v_1)$ und W ein Unterraum von V mit $V = V_1 \oplus W$.
Dann existieren (eindeutig) $h \in \operatorname{Hom}(W, V_1)$ und $g \in \operatorname{Hom}(W, W)$ mit $\forall w \in W(f(w) = h(w) + g(w))$.
Nach 11.2b ist $P_f = (\lambda_1 - t) \cdot P_g$ und folglich $P_g = (\lambda_2 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$. Nach I.V. besitzt W deshalb eine Basis $\overline{w} = (v_2, ..., v_n)$, so daß $\mathcal{M}_{\overline{w}}(g)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_2, ..., \lambda_n$ ist.
Sei $\overline{v} := (v_1, ..., v_n)$. Nach 11.2a ist dann $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & \mathcal{M}_{\overline{w}}(g) \end{pmatrix}$ und die Behauptung bewiesen.

Korollar. $f \in \mathsf{End}(V)$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn P_f in Linearfaktoren zerfällt.

Beispiel.

$V = \mathbb{R}^3$ und $f := f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $P_f = (2 - t)^3$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.
Wegen $\operatorname{rang}(A - 2E_3) = 2$ ist $\dim \operatorname{Eig}(f; 2) = 1 < 3 = \mu(P_f; 2)$, also f nicht diagonalisierbar.
Offenbar ist $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Eig}(f; 2)$ und $\overline{u} := (v_1, e_2, e_3)$ eine Basis von V. [$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$]

$f(e_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4v_1 + 4e_2 - 2e_3$, $f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3v_1 + 2e_2$. $\quad \mathcal{M}_{\overline{u}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$W = \operatorname{span}(e_2, e_3)$. $\quad h(e_2) = 4v_1$, $h(e_3) = 3v_1$.

$g : W \to W$, $g(e_2) = 4e_2 - 2e_3$, $g(e_3) = 2e_2$

$v_2 := e_2 - e_3 \in \operatorname{Eig}(g; 2)$, denn $g(v_2) = g(e_2) - g(e_3) = 4e_2 - 2e_3 - 2e_2 = 2e_2 - 2e_3 = 2v_2$.

(v_2, e_3) ist Basis von W. $\mathcal{M}_{(v_2, e_3)}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, denn $g(v_2) = 2v_2$ und $g(e_3) = 2e_2 = 2v_2 + 2e_3$

$f(v_1) = 2v_1$,
$f(v_2) = h(v_2) + g(v_2) = h(e_2) - h(e_3) + 2v_2 = 4v_1 - 3v_1 + 2v_2 = v_1 + 2v_2$,
$f(e_3) = h(e_3) + g(e_3) = 3v_1 + 2v_2 + 2e_3$.

Für $\overline{v} = (v_1, v_2, e_3)$ gilt $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lemma 11.5.

Sei $f \in \mathsf{End}(V)$ und $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, so daß

$\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonale $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ist.

Für $g_i := f - \lambda_i{\cdot}\mathrm{id}_V$ $(i = 1, ..., n)$ gilt dann:

(a) $g_i(V_i) \subseteq V_{i-1}$, wobei $V_i := \mathrm{span}(v_1, ..., v_i) \quad (i = 1, ..., n)$.

(b) $g_1 \circ \cdots \circ g_n = 0$.

(c) $1 \leq k \leq n \;\&\; \lambda_1 = ... = \lambda_k \implies v_1, ..., v_k \in \mathrm{Ker}(g_1^k)$.

Beweis :

Sei $A = (a_{ij})_{i,j} := \mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$.

(a) $g_i(v_j) = \begin{cases} a_{1j}v_1 + \ldots + a_{jj}v_j - \lambda_i v_j \in V_{i-1} & \text{falls } j < i \\ a_{1i}v_1 + \ldots + a_{ii}v_i - \lambda_i v_i \in V_{i-1} & \text{falls } j = i \end{cases}$, denn $a_{ii} = \lambda_i$.

(b) Mit (a) folgt $(g_1 \circ ... \circ g_n)(V_n) \subseteq (g_1 \circ ... \circ g_{n-1})(V_{n-1}) \subseteq (g_1 \circ ... \circ g_{n-2})(V_{n-2}) \subseteq \ldots \subseteq g_1(V_1) \subseteq V_0 = \{0\}$.

(c) Induktion nach k: 1. $k = 1$: $g_1(v_1) = f(v_1) - \lambda_1 v_1 = 0$.

2. $k > 1$: Nach I.V. haben wir $v_1, ..., v_{k-1} \in \mathrm{Ker}(g_1^{k-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(g_1^k)$. Somit gilt:

$g_1^k(v_k) = g_1^{k-1}(g_1(v_k)) = g_1^{k-1}(a_{1k}v_1 + \ldots + a_{kk}v_k - \lambda_1 v_k) = g_1^{k-1}(a_{1k}v_1 + \ldots + a_{k-1,k}v_{k-1}) \overset{\text{I.V.}}{=} 0$.

Definition.

Sei K ein Körper. Eine Menge R zusammen mit Verknüpfungen

$+ : R \times R \to R$, $\otimes : R \times R \to R$, $\odot : K \times R \to R$ heißt K-*Algebra*, wenn gilt:

(i) $(R, +, \otimes)$ ist ein Ring mit Eins,

(ii) $(R, +, \odot)$ ist ein K-Vektorraum,

(iii) Für alle $a, b \in R$, $\lambda \in K$ gilt: $\lambda \odot (a \otimes b) = (\lambda \odot a) \otimes b = a \otimes (\lambda \odot b)$.

Bemerkung.

1. Der Polynomring $K[t]$ zusammen mit seiner auf $K \times K[t]$ eingeschränkten Multiplikation als skalarer Multiplikation ist eine K-Algebra.
2. Für jeden K-Vektorraum V ist der in §5 eingeführte K-Vektorraum $\mathsf{End}(V)$ zusammen mit $\circ$ (der Komposition von Abbildungen) als Ringmultiplikation eine K-Algebra. Das Einselement ist dabei id_V.
3. Der Körper K selbst ist auch eine K-Algebra.

Definition.

Ist $(R, +, \otimes, \odot)$ eine K-Algebra, so definiert man für jedes $\mathbf{r} \in R$ den *Einsetzungshomomorphismus*

$\Phi_{\mathbf{r}} : K[t] \to R$, $\Phi_{\mathbf{r}}(\sum_{i=0}^n a_i t^i) := \sum_{i=0}^n a_i \odot \mathbf{r}^i$, wobei $\mathbf{r}^0 := \mathbf{1}_R$, $\mathbf{r}^{i+1} := \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}$.

Schreibweise: Für $p \in K[t]$ und $\mathbf{r} \in R$ sei $p(\mathbf{r}) := \Phi_{\mathbf{r}}(p)$.

Lemma 11.6.

$\Phi_{\mathbf{r}}$ ist sowohl Ring- als auch Vektorraumhomomorphimus, d.h. für alle $p, q \in K[t]$ und $\lambda \in K$ gilt:

$(p + q)(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r})$, $\quad (p{\cdot}q)(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \otimes q(\mathbf{r})$, $\quad (\lambda{\cdot}p)(\mathbf{r}) = \lambda \odot p(\mathbf{r})$.

Zum Beweis vergl. Lemma 9.8.

Von besonderer Bedeutung (für diese Vorlesung) sind die Einsetzungshomomorphismen

$\Phi_\lambda : K[t] \to K$, $p \mapsto p(\lambda)$ für $\lambda \in K$ (siehe §9), sowie $\Phi_f : K[t] \to \mathsf{End}(V)$, $p \mapsto p(f)$ für $f \in \mathsf{End}(V)$.

Lemma 11.7.
Für $f \in \mathsf{End}(V)$ und $p, q \in K[t]$ gilt:
(a) $p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$.
(b) Ist U ein f-invarianter Unterraum von V, so $p(f)(x) = p(f|U)(x)$ für alle $x \in U$.
(c) $\mathrm{Ker}(p(f))$ ist f-invariant.

Beweis :
(a) $p(f) \circ q(f) \overset{11.6}{=} (pq)(f) = (qp)(f) \overset{11.6}{=} q(f) \circ p(f)$.
(b) Sei $g := f|U$. $x \in U \;\Rightarrow\; p(f)(x) = \sum_i a_i{\cdot}f^i(x) = \sum_i a_i{\cdot}g^i(x) = (\sum_i a_i{\cdot}g^i)(x) = p(g)(x)$.
(c) $x \in \mathrm{Ker}(p(f)) \;\Rightarrow\; p(f)(x) = 0 \;\Rightarrow\; p(f)(f(x)) = (p(f) \circ f)(x) \overset{(a)}{=} (f \circ p(f))(x) = f(p(f)(x)) = 0$.

Lemma 11.8.
$f \in \mathsf{End}(V)$ & $p, q \in K[t]$ teilerfremd & $p(f) \circ q(f) = 0 \implies V = \mathrm{Ker}(p(f)) \oplus \mathrm{Ker}(q(f))$.

Beweis :
Nach Satz 9.3a gibt es $p', q' \in K[t]$ mit $1 = p'p + q'q$, also (nach 11.6) $\mathrm{id}_V = p'(f){\circ}p(f) + q'(f){\circ}q(f)$.
1. $V = \mathrm{Ker}(p(f)) + \mathrm{Ker}(q(f))$:
Sei $x \in V$. Dann $x = \mathrm{id}_V(x) = u + v$ mit $u := (q'(f){\circ}q(f))(x)$ und $v := (p'(f){\circ}p(f))(x)$.
Es ist $p(f)(u) = (p(f){\circ}q'(f){\circ}q(f))(x) \overset{11.7a}{=} (p(f){\circ}q(f){\circ}q'(f))(x) = (0{\circ}q'(f))(x) = 0$ und ebenso $q(f)(v) = 0$.
Also $x = u + v \in \mathrm{Ker}(p(f)) + \mathrm{Ker}(q(f))$.
2. Die Summe ist direkt:
$y \in \mathrm{Ker}(p(f)) \cap \mathrm{Ker}(q(f)) \;\Rightarrow\; y = \mathrm{id}_V(y) = (p'(f) \circ p(f))(y) + (q'(f) \circ q(f))(y) = p'(f)(0) + q'(f)(0) = 0$.

Satz 11.9.
Sei $f \in \mathsf{End}(V)$. Sind $p_1, ..., p_k \in K[t]$ paarweise teilerfremd, und ist $p_1(f) \circ \ldots \circ p_k(f) = 0$, so ist $V = \mathrm{Ker}(p_1(f)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(p_k(f))$.

Beweis durch Induktion nach k:
Sei $p := p_1$ und $q := p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Nach 9.3b sind p, q teilerfremd.
Mit L.11.8 folgt $V = \mathrm{Ker}(p_1(f)) \oplus U$, wobei $U := \mathrm{Ker}(q(f))$ f-invariant ist (nach L.11.7c).
Sei $g := f|U$. Dann $p_2(g) \circ \ldots \circ p_k(g) = q(g) \overset{\text{L.11.7b}}{=} q(f)|U = 0$.
Nach I.V. gilt also $U = \mathrm{Ker}(p_2(g)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(p_k(g))$. Es folgt $V = \mathrm{Ker}(p_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(p_2(g)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(p_k(g))$.
Somit muß nur noch $\mathrm{Ker}(p_i(g)) = \mathrm{Ker}(p_i(f))$ für $i = 2, ..., k$ gezeigt werden: $\mathrm{Ker}(p_i(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(q(f)) = U \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; \mathrm{Ker}(p_i(f)) = \{x \in U : p_i(f)(x) = 0\} \overset{\text{L.11.7b}}{=} \{x \in U : p_i(g)(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(p_i(g))$.

Satz 11.10 (Zerlegung in Haupträume).
Sei $f \in \mathsf{End}(V)$ und $P_f = (\lambda_1 - t)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t)^{\mu_k}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$.
Für $g_i := f - \lambda_i{\cdot}\mathrm{id}_V$ gilt dann:
(a) $V = \mathrm{Ker}(g_1^{\mu_1}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(g_k^{\mu_k})$
(b) $\dim \mathrm{Ker}(g_i^{\mu_i}) = \mu_i$ für $i = 1, ..., k$.

Beweis:

(1) Für $p_i := (t-\lambda_i)^{\mu_i}$ gilt $p_i(f) = g_i^{\mu_i}$.

Nach 11.4 besitzt V eine Basis $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$, so daß gilt:

(2) $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ ist obere Dreiecksmatrix mit Diagonale $\lambda_1, ..., \lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_k$.

Mit 11.5b folgt daraus $g_1^{\mu_1} \circ \ldots \circ g_k^{\mu_k} = 0$ und weiter mit 11.9 und (1) die Behauptung (a).

Wir haben nun $\dim \mathrm{Ker}(g_1^{\mu_1}) + \ldots + \dim \mathrm{Ker}(g_k^{\mu_k}) \overset{(a)}{=} \dim(V) = \deg(P_f) = \mu_1 + \ldots + \mu_k$.

Zum Beweis von (b) genügt es also, $\mu_i \le \dim \mathrm{Ker}(g_i^{\mu_i})$ für $i = 1, ..., k$ zu zeigen.

Wegen der Kommutativität von $K[t]$ reicht es, denn Fall $i = 1$ zu behandeln:

Nach (1) und 11.5c gilt $v_1, ..., v_{\mu_1} \in \mathrm{Ker}(g_1^{\mu_1})$. Also ist $\mu_1 \le \dim \mathrm{Ker}(g_1^{\mu_1})$.

Definition.

Ist λ Eigenwert von $f \in \mathsf{End}(V)$ mit algebraischer Vielfachheit μ, so nennt man $\mathrm{Hau}(f;\lambda) := \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^\mu$ den *Hauptraum* von f zum Eigenwert λ.

Bemerkung.

(a) $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \subseteq \mathrm{Hau}(f;\lambda)$.

(b) $\mathrm{Hau}(f;\lambda)$ ist f-invariant.

Beweis von (b): Sei $g := f - \lambda\, \mathrm{id}_V$ und $U := \mathrm{Hau}(f;\lambda)$.

$x \in U \Rightarrow \lambda x \in U \;\&\; g^\mu(g(x)) = g(g^\mu(x)) = 0 \Rightarrow \lambda x, g(x) \in U \Rightarrow f(x) = g(x) + \lambda x \in U$.

Definition.

Ein Endomorphismus f heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f^k = 0$ gibt.

Lemma 11.11.

Sei $f \in \mathsf{End}(V)$, $\dim(V) = n \ge 1$ und $k \ge 1$ mit $f^k = 0$, $f^{k-1} \ne 0$.

Für $U_i := \mathrm{Ker}(f^i)$ gilt dann: (a) $U_i \subseteq U_{i+1} = \overset{-1}{f}(U_i)$. (b) $i < k \Rightarrow U_i \ne U_{i+1}$.

Beweis:

(a) $f^i(x) = 0 \Rightarrow f^{i+1}(x) = f(f^i(x)) = 0$. $x \in \overset{-1}{f}(U_i) \Leftrightarrow f(x) \in U_i \Leftrightarrow f^i(f(x)) = 0 \Leftrightarrow x \in U_{i+1}$.

(c) Aus (a) folgt durch Induktion nach l: $U_i = U_{i+1} \;\&\; i \le l \Rightarrow U_l = U_{l+1}$.

Mit $f^{k-1} \ne 0 = f^k$ (also $U_{k-1} \ne U_k$) folgt daraus die Behauptung.

Satz 11.12.

Sei $f \in \mathsf{End}(V)$ und $\dim(V) = n \ge 1$. Äquivalent sind:

(i) f ist nilpotent.

(ii) $f^k = 0$ für ein $k \in \{1, ..., n\}$.

(iii) $P_f = (-t)^n$.

(iv) Es gibt eine Basis $\overline{v}$ von V mit $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 0 \end{pmatrix}$.

Beweis:

"(i)$\Rightarrow$(ii),(iv)": Sei k minimal mit $f^k = 0$. Wegen $f^0 = \mathrm{id}_V \ne 0$ ist $k \ge 1$. Sei $U_i = \mathrm{Ker}(f^i)$.

Nach L.11.11 haben wir $\{0\} = U_0 \subsetneqq U_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_k = V$, also $k \le \dim(V) = n$.

Wir wählen eine Basis $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ von V, so daß gilt:

Es gibt $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k = n$ mit $U_l = \operatorname{span}(v_1, ..., v_{n_l})$ für $l = 1, ..., k$.

Behauptung: $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ ist von der gewünschten Form.

Beweis: Sei $1 \leq j \leq n$. Dann existiert ein $l \in \{1, ..., k-1\}$, so daß $n_l < j \leq n_{l+1}$. Es folgt $v_j \in U_{l+1}$ und weiter $f(v_j) \in U_l \subseteq \operatorname{span}(v_1, ..., v_{j-1})$. Also $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ mit $a_{ij} = 0$ für $i = j, ..., n$.

"(iv)⇔(iii)": Satz 11.4. "(ii)⇒(i)": trivial.

"(iv)⇒(ii)": Aus 11.5b folgt $f^n = 0$. Man kann auch direkt $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)^n = 0$ zeigen.

Definition. Sei $g \in \mathsf{End}(V)$.

Ein m-Tupel $\overline{u}$ von Vektoren aus V heißt *g-zyklisch*, wenn es ein $u \in V$ gibt, so daß $\overline{u} = (g^{m-1}(u), g^{m-2}(u), \ldots, g(u), u)$ und $m = \min\{i : g^i(u) = 0\}$.

Ein Unterrraum U von V heißt *g-zyklisch*, wenn es eine g-zyklische Basis von U gibt.

$$J_m := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i+1,j})_{i,j} \in K^{m \times m}.$$

Bemerkung.

Ist $\overline{u} = (u_1, ..., u_m)$ eine Basis des Unterraums U, so gilt:

$\overline{u}$ ist g-zyklisch $\iff$ U ist g-invariant und $\mathcal{M}_{\overline{u}}(g|U) = J_m$.

Satz 11.13.

Sei g ein nilpotenter Endomorphismus von V und $k := \min\{i : g^i = 0\}$.

Dann gibt es $s_1, ..., s_k \in \mathbb{N}$ und g-zyklische Unterräume $U_1^{(1)}, ..., U_{s_1}^{(1)}, \ldots, U_1^{(k)}, ..., U_{s_k}^{(k)}$, so daß $V = U_1^{(k)} \oplus \ldots \oplus U_{s_k}^{(k)} \oplus \ldots\ldots \oplus U_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus U_{s_1}^{(1)}$ und $\dim(U_j^{(i)}) = i$.

Wählt man in jedem $U_j^{(i)}$ eine g-zyklische Basis $\overline{u}_j^{(i)}$ und setzt dann $\overline{v} := \overline{u}_1^{(k)} * \ldots * \overline{u}_{s_k}^{(k)} * \ldots\ldots * \overline{u}_1^{(1)} * \ldots * \overline{u}_{s_1}^{(1)}$, so ist $\overline{v}$ eine Basis von V und es gilt

$$\mathcal{M}_{\overline{v}}(g) = \begin{pmatrix} J_k & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & J_k & & & & & & \\ & & & J_{k-1} & & & \mathbf{0} & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & J_{k-1} & & & \\ & & \mathbf{0} & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & J_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} s_k\text{-mal} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} s_{k-1}\text{-mal} \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} s_1\text{-mal} \end{array}$$

Beweis:

Sei $U_i := \operatorname{Ker}(g^i)$. Dann $\{0\} = U_0 \subsetneqq U_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_{k-1} \subsetneqq U_k = V$.

Wir definieren rekursiv Unterräume $W_k, \ldots, W_1$:

1. W_k sei ein Unterraum von V $(= U_k)$ mit $V = W_k \oplus U_{k-1}$.
2. Sei jetzt $1 < l \leq k$ und $W_k, \ldots, W_l$ schon definiert, so daß $V = W_k \oplus \ldots \oplus W_l \oplus U_{l-1}$ und $U_l = W_l \oplus U_{l-1}$.

Dann $g(W_l) \subseteq g(U_l) \subseteq U_{l-1}$ und $g(W_l) \cap U_{l-2} \overset{(*)}{=} \{0\}$.

$[(*)\ x \in W_l \;\&\; g(x) \in U_{l-2} \;\Rightarrow\; x \in W_l \cap \overset{-1}{g}(U_{l-2}) = W_l \cap U_{l-1} = \{0\}]$

Wegen $g(W_l), U_{l-2} \subseteq U_{l-1}$ und $g(W_l) \cap U_{l-2} = \{0\}$ existiert ein Unterraum W_{l-1} von U_{l-1} mit $U_{l-1} = W_{l-1} \oplus U_{l-2}$ und $g(W_l) \subseteq W_{l-1}$.

Schließlich setzen wir noch $W_0 := \{0\}$. Nach Konstruktion gilt dann

(1) $V = W_k \oplus W_{k-1} \oplus \ldots \oplus W_1$,

(2) $g(W_l) \subseteq W_{l-1}$ für $l = 1, ..., k$, und $g|W_l$ injektiv für $l = 2, ..., k$.
[Die Injektivität von $g|W_l$ folgt aus $W_l \cap \operatorname{Ker}(g) \subseteq W_l \cap U_{l-1} = \{0\}$.]

Aus (2) folgt weiter:

(3) Ist $2 \leq l \leq k$ und $\overline{w} = (w_1, ..., w_\nu)$ eine Basis von W_l, so ist $g(\overline{w}) = (g(w_1), ..., g(w_\nu))$ linear unabhängig in W_{l-1} und kann zu einer Basis von W_{l-1} ergänzt werden.

Durch Iteration von (3) kommt man wie folgt zu einer Basis von $V = W_k \oplus \ldots \oplus W_1$.

$$\begin{array}{ll}
w_1^{(k)}, \ldots\ldots\ldots, w_{s_k}^{(k)}, & \text{Basis von } W_k \\
g(w_1^{(k)}), \ldots\ldots, \ g(w_{s_k}^{(k)})\ , \quad w_1^{(k-1)}, \ldots\ldots\ldots, w_{s_{k-1}}^{(k-1)}, & \text{Basis von } W_{k-1} \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\
g^{k-1}(w_1^{(k)}), \ldots, g^{k-1}(w_{s_k}^{(k)}),\ g^{k-2}(w_1^{(k-1)}), \ldots, g^{k-2}(w_{s_{k-1}}^{(k-1)}), \ldots\ldots\ldots, w_1^{(1)}, \ldots, w_{s_1}^{(1)} & \text{Basis von } W_1
\end{array}$$

Es sei $U_j^{(i)} = \operatorname{span}(g^{i-1}(w_j^{(i)}), \ldots, g(w_j^{(i)}), w_j^{(i)})$.

Wegen $w_j^{(i)} \in W_i \subseteq U_i = \operatorname{Ker}(g^i)$ gilt $g(g^{i-1}(w_j^{(i)})) = 0$, also $U_j^{(i)}$ g-zyklisch.

Bemerkung. Wegen $U_1 = W_1 \oplus U_0$ und $U_0 = \{0\}$ ist stets $W_1 = U_1 = \operatorname{Ker}(g)$.

Beispiele.

1. $g = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$.

$k = 3$, $U_1 = \operatorname{span}(e_1) \subsetneqq U_2 = \operatorname{span}(e_1, e_2) \subsetneqq U_3 = \mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^3 = W_3 \oplus U_2 \;\rightsquigarrow\; W_3 := \operatorname{span}(e_3)$.

$g(W_3) \subseteq W_2 \;\&\; U_2 = W_2 \oplus U_1 \;\rightsquigarrow\; W_2 = \operatorname{span}(g(e_3))$.

$W_1 = U_1 = \operatorname{span}(e_1) = \operatorname{span}(g^2(e_3))$.

$\overline{v} = (g^2(e_3), g(e_3), e_3) = (2e_1, 3e_1 + 2e_2, e_3)$ und $\mathcal{M}_{\overline{v}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $g = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = 0$.

$k = 2$, $U_1 = \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{span}(e_1, e_2 + e_3)$, $U_2 = \operatorname{Ker}(g^2) = \mathbb{R}^4$.

$V = W_2 \oplus U_1 \;\rightsquigarrow\; W_2 := \operatorname{span}(e_3, e_4)$. $\quad W_1 = \operatorname{span}(g(e_3), g(e_4)) = \operatorname{span}(e_1, e_2 + e_3) = U_1$.

$\overline{v} = (g(e_3), e_3, g(e_4), e_4)$ und $\mathcal{M}_{\overline{v}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definition.

Unter einem *Jordankästchen* versteht man eine Matrix der Form $\lambda{\cdot}E_m + J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{pmatrix}$.

Eine quadratische Matrix A heißt *Jordanmatrix* (oder *in Jordan Normalform*), wenn sie die Gestalt
$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_\ell \end{pmatrix}$ hat, wobei $A_1, \ldots, A_\ell$ Jordankästchen sind.

Bemerkung.

Ist $g \in \mathsf{End}(V)$ nilpotent und $f = g + \lambda{\cdot}\mathrm{id}_V$, so ist die darstellende Matrix von f
bzgl. der in 11.13 für g konstruierten Basis $\overline{v}$ eine Jordanmatrix.

Satz 11.15 (Jordansche Normalform)

Zerfällt das charakteristische Polynom von $f \in \mathsf{End}(V)$ in Linearfaktoren,
so gibt es eine Basis $\overline{v}$ von V derart, daß $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ eine Jordanmatrix ist.

Beweis:

Sei $P_f = (\lambda_1 - t)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t)^{\mu_k}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_k$.

Sei $g_i := f - \lambda_i{\cdot}\mathrm{id}_V$ und $V_i := \mathrm{Ker}(g_i^{\mu_i}) = \mathrm{Hau}(f; \lambda_i)$. Nach 11.10 gilt dann $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

Für $i = 1, ..., k$ gilt:

(1) V_i ist g_i-invariant und $g_i|V_i$ ist nilpotent. $[(g_i|V_i)^{\mu_i} = g_i^{\mu_i}|V_i = 0]$

(2) V_i ist f-invariant und $f|V_i = g_i|V_i + \lambda_i{\cdot}\mathrm{id}_{V_i}$

Nach (2) und obiger Bemerkung besitzt V_i eine Basis $\overline{v}^{(i)}$, so daß $B_i := \mathcal{M}_{\overline{v}^{(i)}}(f|V_i)$ eine Jordanmatrix ist.

Dann ist $\overline{v} := \overline{v}^{(1)} * \ldots * \overline{v}^{(k)}$ eine Basis von V und es gilt $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} B_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & B_k \end{pmatrix}$.

Somit ist auch $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ eine Jordanmatrix.

§12 Euklidische und unitäre Vektorräume

Definition

Sei V ein K-Vektorraum.

Eine Abbildung $\sigma : V \times V \to K$ heißt *Bilinearform* (auf V), wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

(B1) $\sigma(v + v', w) = \sigma(v, w) + \sigma(v', w)$ und $\sigma(\lambda v, w) = \lambda\sigma(v, w)$,

(B2) $\sigma(v, w + w') = \sigma(v, w) + \sigma(v, w')$ und $\sigma(v, \lambda w) = \lambda\sigma(v, w)$.

Eine Bilinearform σ heißt

symmetrisch, falls $\sigma(v, w) = \sigma(w, v)$ für alle $v, w \in V$,

alternierend (oder *schiefsymmetrisch*), falls $\sigma(w, v) = -\sigma(v, w)$ für alle $v, w \in V$.

Definition.

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Eine Abbildung $f : V \to V$ *semilinear*, wenn

$f(v + w) = f(v) + f(w)$ und $f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$ für alle $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *Sesquilinearform*, wenn
σ im ersten Argument linear und im zweiten Argument semilinear ist,
d.h. wenn für alle $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

(B1) $\sigma(v + v', w) = \sigma(v, w) = \sigma(v', w)$ und $\sigma(\lambda v, w) = \lambda\sigma(v, w)$,

($\overline{\text{B}}$2) $\sigma(v, w + w') = \sigma(v, w) + \sigma(v, w')$ und $\sigma(v, \lambda w) = \overline{\lambda}\sigma(v, w)$.

Ein Sesquilinearform σ heißt *hermitesche Form*, wenn zusätzlich gilt:

(H) $\sigma(w, v) = \overline{\sigma(v, w)}$ für alle $v, w \in V$.

Im folgenden steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Form.

σ heißt *positiv definit*, wenn $\sigma(v, v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Form nennt man ein *Skalarprodukt*.

Ein $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heißt *euklidischer* bzw. *unitärer* Vektorraum.

Achtung! Es kann $\sigma(v_i, v_i) > 0$ für alle Vektoren v_i einer Basis sein, ohne daß σ positiv definit ist. [Beispiel: $\sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) := x_1 y_1 - x_2 y_2$]

Beispiele euklischer Vektorräume.

1. Der $\mathbb{R}^n$ mit dem *kanonischen* Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

   Für $x = {}^t(x_1 \dots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \dots y_n)$ sei $\langle x, y \rangle := {}^t x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ und $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
2. Der Hilbertsche Folgenraum $\ell^2 = (V, \sigma)$: $V := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$, $\sigma(x, y) := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$.
3. Der Raum $C[0, 1]$ aller stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, und dem Skalarprodukt $\sigma(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Zum kanonischen Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ ist $\|x\|$ die Länge des Vektors x bzw. der Abstand des Punktes x vom Nullpunkt.

Sei jetzt $0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $0 \neq y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Ist $\alpha_x \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen e_1 und x, so gilt: $x_1 = \|x\| \cdot \cos \alpha_x$ und $x_2 = \|x\| \cdot \sin \alpha_x$.

Ist $\varphi \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen x und y, so gilt $\varphi = |\alpha_x - \alpha_y|$ und somit

(1) $\cos(\varphi) = \cos(\alpha_x - \alpha_y) = \cos \alpha_x \cos \alpha_y + \sin \alpha_x \sin \alpha_y = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|x\| \cdot \|y\|} = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$,

(2) $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x, y$ senkrecht zueinander,

(3) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\cos(\varphi)\|x\|\|y\|$ (Cosinus-Satz)

[Beweis von (3): $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\cos(\varphi)\|x\|\|y\|$]

Vereinbarung.
Soweit nichts anderes gesagt wird,
sei V im folgenden stets ein euklischer bzw. unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

Definition.

1. $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ heißt die *Norm* (oder *Länge*) von $v \in V$.
2. $v, w \in V$ heißen *orthogonal* (oder *senkrecht*) zueinander (geschrieben $v \perp w$), falls $\langle v, w \rangle = 0$.

Lemma 12.1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Für alle $v, w \in V$ gilt: (i) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, (ii) $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow v, w$ linear abhängig.

Beweis:

1. Seien v, w linear unabhängig. Setze $\lambda := \dfrac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$. Dann gilt: $(*)$ $\langle v - \lambda w, w \rangle = 0$.

Ferner gilt $0 \neq v - \lambda w$ und somit $0 < \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle \overset{(*)}{=} \langle v - \lambda w, v \rangle = \langle v, v \rangle - \lambda \langle w, v \rangle$.

Daraus folgt $0 < \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle \langle w, v \rangle = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}$ und weiter $|\langle v, w \rangle| < \|v\| \cdot \|w\|$.

2. Ist $w = \alpha v$, so $|\langle v, w \rangle| = |\alpha| \langle v, v \rangle = |\alpha| \|v\|^2 = \|v\| \|w\|$.

Definition.
Wegen 12.1(i) kann man für $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definieren: $\sphericalangle(x, y) := \arccos \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [0, \pi]$.

Dann ist $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \sphericalangle(x, y)$.

Lemma 12.2.

(a) Die Abbildung $V \to \mathbb{R}_+$, $v \mapsto \|v\|$ ist eine Norm, d.h. es gilt
  - (i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
  - (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$,
  - (iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

(b) Die Abbildung $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$, $d(v, w) := \|v - w\|$ ist eine Metrik, d.h. es gilt
  - (i) $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$,
  - (ii) $d(v, w) = d(w, v)$,
  - (iii) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$.

Beweis:

(a) (i) klar. (ii) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$.

(iii) $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} \overset{(*)}{\leq}$
$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$. $\quad (*)$ $\langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} = 2\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) \leq 2|\langle v, w\rangle| \leq 2\|v\|\cdot\|w\|$.

(b) (ii) $\|v - w\| = \| - (w - v)\| = 1 \cdot \|w - v\|$. (iii) $\|v - w\| = \|(v - u) + (u - w)\| \leq \|v - u\| + \|u - w\|$.

Lemma 12.3.

Für alle $v, w, v_1, ..., v_k \in V$ gilt:

(a) $\|v_1 + \ldots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_k\|^2$, falls $v_i \perp v_j$ für alle $1 \leq i \neq j \leq k$.

(b) $v \perp w \Rightarrow \langle v, v \pm w\rangle = \|v\|^2$.

(c) $v \perp (w - v) \Rightarrow \langle v, w\rangle = \|v\|^2$.

Beweis:

(a) $\|v_1 + \ldots + v_k\|^2 = \langle \sum_{i=1}^k v_i, \sum_{i=1}^k v_i\rangle = \sum\limits_{1\leq i,j\leq k} \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^k \langle v_i, v_i\rangle$.

(b) $\langle v, v \pm w\rangle = \langle v, v\rangle \pm \langle v, w\rangle$. (c) $\langle v, w\rangle = \langle v, v + (w - v)\rangle$.

Definition.

Seien $v_1, ..., v_k \in V$.

$(v_1, ..., v_k)$ heißt *Orthogonalsystem* (OGS) $:\Longleftrightarrow$ $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, ..., k\}$ mit $i \neq j$.

$(v_1, ..., v_k)$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS) $:\Longleftrightarrow$ $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, ..., k\}$.

$(v_1, ..., v_k)$ heißt *Orthonormalbasis* (ONB) von V $:\Longleftrightarrow$ $(v_1, ..., v_k)$ ist ein ONS und zugleich Basis von V.

Bemerkung. Die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist eine ONB.

Lemma 12.4.

(a) Jedes OGS $(v_1, ..., v_k)$ mit $v_1, ..., v_k \neq 0$ ist linear unabhängig.

(b) Ist $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V, so gilt $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$ für jedes $v \in V$. *(Entwicklungsformel)*

Beweis:

(a) $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \langle \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_j\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle v_i, v_j\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_j \langle v_j, v_j\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$.

(b) Sei $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dann $\langle v, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j$.

Definition.

Für $M \subseteq V$ sei $M^\perp := \{x \in V : \forall y \in M (x \perp y)\}$.

Ist M ein Untervektorraum, so heißt $M^\perp$ das *orthogonale Komplement* von M.

Lemma 12.5.

Für beliebige Teilmengen M, N von V gilt:

(a) $M^\perp$ ist ein Unterraum von V.

(b) $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$.

(c) $M^\perp = \mathrm{span}(M)^\perp$.

(d) $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Beweis:

(a) $v, w \in M^\perp$ & $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \forall y \in M(v \perp y \;\&\; w \perp y) \Rightarrow \forall y \in M(v + \lambda w \perp y) \Rightarrow v + \lambda w \in M^\perp$.

(b) $v \in N^\perp \;\Rightarrow\; \forall y \in N(v \perp y) \overset{M \subseteq N}{\Longrightarrow} \forall y \in M(v \perp y) \;\Rightarrow\; v \in M^\perp$.

(c) $v \in M^\perp \;\Leftrightarrow\; M \subseteq \{v\}^\perp \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \mathrm{span}(M) \subseteq \{v\}^\perp \;\Leftrightarrow\; v \in \mathrm{span}(M)^\perp$.

(d) $v \in M \;\Rightarrow\; \forall x \in M^\perp(x \perp v) \;\Rightarrow\; v \in (M^\perp)^\perp$.

Definition.

Zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal* (in Zeichen $U \perp W$), falls $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $u \in U$, $w \in W$.

Eine Summe $U_1 + \ldots + U_k$ von Unterräumen U_i heißt *orthogonal*, falls $U_i \perp U_j$ für $i \neq j$.

Schreibweise für orthogonale Summen: $U_1 \bigoplus \ldots \bigoplus U_k$.

Lemma 12.6.

(a) Jede orthogonale Summe ist direkt.

(b) $V = U \bigoplus W \implies W = U^\perp \;\&\; U = (U^\perp)^\perp$.

Beweis :

(a) Siehe Beweis von 10.2.

(b) 1. $W \subseteq U^\perp$: trivial.

2. $U^\perp \subseteq W$: Sei $v \in U^\perp$. Dann $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

Es folgt $0 = \langle u, v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, w\rangle = \langle u, u\rangle$, also $u = 0$ und somit $v = w \in W$.

3. Aus Symmetriegründen gilt auch $U = W^\perp$ und folglich $U = (U^\perp)^\perp$.

Definition.

Ist $V = U \oplus U^\perp$, so sei pr_U die zu dieser Zerlegung gehörige Projektion von V auf U (vgl. 5.10), d.h. $\mathsf{pr}_U : V \to U$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $\forall x \in U(\mathsf{pr}_U(x) = x)$ und $\forall x \in U^\perp(\mathsf{pr}_U(x) = 0)$.

Man nennt $\mathsf{pr}_U(v)$ die *orthogonale Projektion* von v auf U, und $v - \mathsf{pr}_U(v) \in U^\perp$ das *Lot* von v auf U.

Lemma 12.7.

Ist U ein Untervektorraum von V und $(v_1, ..., v_m)$ eine ONB von U, so gilt:

$V = U \oplus U^\perp$ und $\mathsf{pr}_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, v_i\rangle v_i$ für alle $v \in V$.

Beweis :

Für $v \in V$ sei $f(v) := \sum_{i=1}^m \langle v, v_i\rangle v_i$.

Dann gilt $f(v) \in U$ und $\langle v - f(v), v_j\rangle = \langle v, v_j\rangle - \sum_{i=1}^m \langle v, v_i\rangle\langle v_i, v_j\rangle = \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_j\rangle = 0$ für $j = 1, ..., m$, also $v - f(v) \in U^\perp$ und folglich $v \in U + U^\perp$. Damit haben wir bewiesen, daß $V = U \oplus U^\perp$ ist und f, $\mathrm{id}_V - f$ die zu dieser Zerlegung gehörenden Projektionen sind, d.h. insbesondere $f = \mathsf{pr}_U$.

Lemma 12.8.

Sei U ein Untervektorraum von V mit $V = U \oplus U^\perp$. Dann gilt für alle $v \in V$:

(a) $v - \mathsf{pr}_U(v) \perp \mathsf{pr}_U(v)$ und folglich $\|v\|^2 = \|\mathsf{pr}_U(v)\|^2 + \|v - \mathsf{pr}_U(v)\|^2$,

(b) $\mathsf{pr}_U(v) \neq u \in U \;\Rightarrow\; \|v - \mathsf{pr}_U(v)\| < \|v - u\|$.

Beweis von (b): Wegen $0 \neq \mathsf{pr}_U(v) - u \in U$ und $v - \mathsf{pr}_U(v) \in U^\perp$ gilt

$\|v - u\|^2 = \|v - \mathsf{pr}_U(v)\|^2 + \|\mathsf{pr}_U(v) - u\|^2 > \|v - \mathsf{pr}_U(u)\|^2$.

Satz 12.9. (Orthonormalisierungssatz).

(a) Sei $(w_1, ..., w_k)$ ein ONS in V und $v \in V \setminus W$, wobei $W := \mathrm{span}(w_1, ..., w_k)$.
Sei ferner $w := v - \mathsf{pr}_W(v)$ (das Lot von v auf W) und $w_{k+1} := \dfrac{w}{\|w\|}$.
Dann ist $(w_1, ..., w_{k+1})$ ein ONS und $\mathrm{span}(w_1, ..., w_{k+1}) = \mathrm{span}(w_1, ..., w_k, v)$.

(b) Seien $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, und sei für $k = 1, ..., n$: $w_k := \dfrac{w'_k}{\|w'_k\|}$, wobei $w'_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle w_i$.
Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine ONB von V.

Beweis:

(a) Nach 12.7 ist $V = W \oplus W^\perp$, also ist pr_W definiert und $\mathsf{pr}_W(v) \in W$, sowie $w = v - \mathsf{pr}_W(v) \in W^\perp$. Wegen $v \notin W$ ist außerdem $w \neq 0$. Es folgt $w_{k+1} \in W^\perp$ und $\|w_{k+1}\| = 1$. Folglich ist $(w_1, ..., w_{k+1})$ ein ONS.

Aus $w_{k+1} = \frac{1}{\|w\|}(v - \mathsf{pr}_W(v))$ und $\mathsf{pr}_W(v) \in W$ folgt $w_{k+1} \in \mathrm{span}(w_1, ..., w_k, v)$ und $v \in \mathrm{span}(w_1, ..., w_{k+1})$ und somit $\mathrm{span}(w_1, ..., w_{k+1}) = \mathrm{span}(w_1, ..., w_k, v)$.

(b) Mittels (a) zeigt man durch Induktion nach k, daß $(w_1, ..., w_k)$ ein ONS ist.

Korollar.

(a) Ist $\dim(V) < \infty$, so besitzt V eine ONB, und jedes ONS in V kann zu einer ONB von V ergänzt werden.

(b) Für jeden endlichdimensionalen Unterraum U von V gilt $V = U \oplus U^\perp$.

Vereinbarung.
Um Verwechslungen mit der Konjugation $\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\overline{a + ib} := a - ib$ zu vermeiden,
werden wir Basen im folgenden auch mit den Buchstaben $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$,... bezeichnen.

Definition.
Ist V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ und σ eine Bilinearform auf V,
so nennt man $\mathcal{M}_\mathbf{v}(\sigma) := \big(\sigma(v_i, v_j)\big)_{i,j} \in K^{n\times n}$ die *darstellende Matrix von σ bzgl.* $\mathbf{v}$.

Bemerkung.

(1) Für $x = {}^t(x_1 \, \dots \, x_n) \in K^n$ und $y = {}^t(y_1 \, \dots \, y_n) \in K^n$ gilt offenbar
$\sigma(\sum_i x_i v_i, \sum_i y_i v_i) = \sum_{i,j} x_i \sigma(v_i, v_j) y_j = {}^t x \cdot \mathcal{M}_\mathbf{v}(\sigma) \cdot y$.

(2) $A, B \in K^{n\times n}$ & $\forall x, y \in K^n({}^t xAy = {}^t xBy) \;\Rightarrow\; A = B$. [zum Beweis: ${}^t e_i A e_j = a_{ij}$]

Lemma 12.10.
Ist V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$, so gilt:
(a) Die Abbildung $\sigma \mapsto \mathcal{M}_\mathbf{v}(\sigma)$ von der Menge der Bilinearformen auf V in $K^{n\times n}$ ist bijektiv.
(b) Eine Bilinearformen σ auf V ist genau dann symmetrisch, wenn $\mathcal{M}_\mathbf{v}(\sigma)$ symmetrisch ist.

Beweis:

(a) injektiv: $\mathcal{M}_\mathbf{v}(\sigma) = \mathcal{M}_\mathbf{v}(\tau) \;\Rightarrow\; \sigma(v_i, v_j) = \tau(v_i, v_j)$ $(\forall i, j)$ $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\sigma(v, w) = \tau(v, w)$ $(\forall v, w \in V)$.

surjektiv: Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$.
Dann wird durch $\sigma(\sum_i x_i v_i, \sum_i y_i v_i) := \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$ eine Bilinearform σ mit $\mathcal{M}_\mathbf{v}(\sigma) = A$ definiert.

(b) Sei $A := \mathcal{M}_\mathbf{v}(\sigma)$. Dann gilt $\forall x, y \in K^n({}^t yAx = {}^t x\, {}^t\!Ay)$ und folglich:
$\forall v, w \in V(\sigma(v, w) = \sigma(w, v)) \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in K^n({}^t xAy = {}^t yAx) \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in K^n({}^t xAy = {}^t x\, {}^t\!Ay) \;\Leftrightarrow\; A = {}^t\!A$.

Lemma 12.11 (Transformationsformel).
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basen $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, und sei $T_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}$ $(= \mathcal{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}(\mathrm{id}_V))$ die entsprechende Transformationsmatrix. Für jede Bilinearform σ auf V gilt dann: $\mathcal{M}_{\mathbf{w}}(\sigma) = {}^tT_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}\mathcal{M}_{\mathbf{v}}(\sigma)T_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}$.

Beweis:

$T_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}} = \mathcal{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}(\mathrm{id}_V) = (c_{ij})_{ij}$ mit $w_j = \mathrm{id}_V(w_j) = \sum_i c_{ij}v_i$.

$\sigma(w_k, w_j) = \sigma(\sum_i c_{ik}v_i, \sum_i c_{ij}v_i) = \sum_l \sum_i c_{lk}\sigma(v_l, v_i)c_{ij}$.

Bemerkung (Darstellende Matrix einer Sesquilinearform).
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ und σ eine Sesquilinearform auf V.

1. $\mathcal{M}_{\mathbf{v}}(\sigma) := \big(\sigma(v_i, v_j)\big)_{i,j} \in K^{n\times n}$ heißt *darstellende Matrix von σ bzgl.* $\mathbf{v}$.
2. Für $x = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathbb{C}^n$ und $y = {}^t(y_1 \ \dots \ y_n) \in \mathbb{C}^n$ gilt
   $\sigma(\sum_i x_iv_i, \sum_i y_iv_i) = \sum_{i,j} x_i\sigma(v_i, v_j)\overline{y_j} = {}^tx{\cdot}\mathcal{M}_{\mathbf{v}}(\sigma){\cdot}\overline{y}$.
3. σ ist genau dann hermitesch, wenn die darstellende Matrix $A = \mathcal{M}_{\mathbf{v}}(\sigma)$ *hermitesch* ist,
   d.h. wenn ${}^tA = \overline{A}$ gilt.
4. Die Transformationsformel für σ lautet: $\mathcal{M}_{\mathbf{w}}(\sigma) = {}^tT_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}\mathcal{M}_{\mathbf{v}}(\sigma)\overline{T_{\mathbf{v}}^{\mathbf{w}}}$.

Bemerkung.
Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt σ, und sei $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V.
Für $x = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $y = {}^t(y_1 \ \dots \ y_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt dann:
$\sigma(\sum_i x_iv_i, \sum_i y_iv_i) = {}^tx{\cdot}\overline{y}$ und $\| \sum_i x_iv_i\|^2 = \sum_i |x_i|^2$.

Nachtrag

Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ sei $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ (die zu z konjugiert komplexe Zahl).

Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{\overline{z}} = z$, $z\overline{z} = |z|^2$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Für jede Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ sei $\overline{A} := (\overline{a_{ij}})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Es gilt: $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, und ${}^t(\overline{A}) = \overline{{}^tA}$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Lemma. Die Abbildung $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(z, u) \mapsto \langle z, u\rangle := {}^tz{\cdot}\overline{u} = \sum_i z_i\overline{u_i}$ ist eine positiv definite hermitesche Form und heißt das *kanonische Skalarprodukt im* $\mathbb{C}^n$.

Fundamentalsatz der Algebra. Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$ zerfällt in Linearfaktoren.

Lemma 12.12.
Sei $\sigma : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform und $q : V \to \mathbb{C}$, $q(v) := \sigma(v, v)$.
Dann gilt für alle $v, w \in V$: $\sigma(v, w) = \frac{1}{4}(q(v + w) - q(v - w) + \mathrm{i}q(v + \mathrm{i}w) - \mathrm{i}q(v - \mathrm{i}w))$.

Beweis:

$q(\lambda{\cdot}v) = \sigma(\lambda v, \lambda v) = \lambda\overline{\lambda}q(v) = |\lambda|^2q(v)$.

$q(v + w) - q(v - w) + \mathrm{i}q(v + \mathrm{i}w) - \mathrm{i}q(v - \mathrm{i}w) = \sigma(v, w) + \sigma(w, v) - (-\sigma(v, w) - \sigma(w, v)) + \mathrm{i}(q(v) + q(w) +$
$\sigma(v, \mathrm{i}w) + \sigma(\mathrm{i}w, v) - q(v) - q(w) + \sigma(v, \mathrm{i}w) + \sigma(\mathrm{i}w, v)) =$
$2(\sigma(v, w) + \sigma(w, v)) + \mathrm{i}(-\mathrm{i}\sigma(v, w) + \mathrm{i}\sigma(w, v) - \mathrm{i}\sigma(v, w) + \mathrm{i}\sigma(w, v)) =$
$2(\sigma(v, w) + \sigma(w, v)) + \sigma(v, w) - \sigma(w, v) + \sigma(v, w) - \sigma(w, v) = 4\sigma(v, w)$.

§13 Orthogonale, unitäre und selbstadjungierte Endomorphismen

In diesem Abschnitt sei V stets ein endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Definition.

Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *orthogonal* bzw. *unitär*, wenn $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

Lemma 13.1.

Für jeden orthogonalen bzw. unitären Endomorphismus $f : V \to V$ gilt

(a) $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

(b) $v, w \in V$ & $v \perp w \Rightarrow f(v) \perp f(w)$.

(c) f ist Isomorphismus und f^{-1} ist ebenfalls orthogonal bzw. unitär.

(d) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f, so $|\lambda| = 1$.

Beweis:

(c) Wegen (a) ist f injektiv, also ein Isomorphismus.

Ferner $\langle f^{-1}(v), f^{-1}(w)\rangle = \langle f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(w))\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

(d) $\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\cdot\|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Lemma 13.2.

$f \in \mathsf{End}(V)$ & $\forall v \in V(\,\|f(v)\| = \|v\|\,) \implies f$ orthogonal bzw. unitär.

Beweis:

Sei $q(v) := \langle v, v\rangle$. Dann $q(f(v)) = q(v)$.

1. V euklidisch: Offenbar gilt $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$ für alle $v, w \in V$.

Somit $\langle f(v), f(w)\rangle = \frac{1}{2}(q(f(v) + f(w)) - q(f(v)) - q(f(w)) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)) = \langle v, w\rangle$.

2. V unitär: Nach L.12.12 gilt dann $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(q(v + w) - q(v - w) + \mathrm{i}q(v + \mathrm{i}w) - \mathrm{i}q(v - \mathrm{i}w))$. Es folgt:
$\langle f(v), f(w)\rangle = \frac{1}{4}(q(f(v) + f(w)) - q(f(v) - f(w)) + \mathrm{i}q(f(v) + \mathrm{i}f(w)) - \mathrm{i}q(f(v) - \mathrm{i}f(w))) = \frac{1}{4}(q(f(v + w)) - q(f(v - w)) + \mathrm{i}q(f(v + \mathrm{i}w)) - \mathrm{i}q(f(v - \mathrm{i}w))) = \frac{1}{4}(q(v + w) - q(v - w) + \mathrm{i}q(v + \mathrm{i}w) - \mathrm{i}q(v - \mathrm{i}w))) = \langle v, w\rangle$.

Definition.

$A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ heißt *orthogonal* $:\Leftrightarrow \quad A^{-1} = {}^tA$.

$A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ heißt *unitär* $:\Leftrightarrow \quad A^{-1} = \overline{{}^tA}$.

Bemerkungen.

(a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann orthogonal, wenn ${}^tA\cdot A = E_n$.

(b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann unitär, wenn ${}^tA\cdot\overline{A} = E_n$.

(c) Jede orthogonale Matrix ist unitär.

(d) Ist A unitär, so $|\det(A)| = 1$. $[E = {}^tA\cdot\overline{A} \Rightarrow 1 = \det({}^tA)\cdot\det(\overline{A}) = \det(A)\cdot\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2]$

(e) Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
   (i) A ist orthogonal bzw. unitär.
   (ii) Die Spalten von A bilden eine ONB von $\mathbb{K}^n$.
   (iii) Die Zeilen von A bilden eine ONB von $\mathbb{K}^{1\times n}$.
   (iv) f_A ist orthogonal bzw. unitär.

Definition.
$O(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) : A^{-1} = {}^tA\}$, *(orthogonale Gruppe)*
$SO(n) := \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$, *(spezielle orthogonale Gruppe)*
$U(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) : A^{-1} = \overline{{}^tA}\}$, *(unitäre Gruppe)*

Die Matrizen aus $SO(n)$ nennt man auch *eigentlich orthogonal*.

Bemerkung.
$O(n)$ ist Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, $SO(n)$ Untergruppe von $O(n)$ und $U(n)$ Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$.

Beweis für $U(n)$:
$A, B \in U(n) \;\Rightarrow\; {}^t(AB)\cdot\overline{AB} = {}^tB{}^tA\overline{A}\overline{B} = {}^tB\overline{B} = E$ und $A^{-1} = \overline{{}^tA}$, also $\overline{{}^t(A^{-1})} = A = (A^{-1})^{-1}$.

Lemma 13.3.
Sei $f \in \mathsf{End}(V)$ und $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V. Dann gilt:
f orthogonal bzw. unitär $\iff$ $(f(v_1), ..., f(v_n))$ ist ONB von V.

Beweis :
1. f orthogonal bzw. unitär $\Rightarrow \langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.
2. Gelte $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \delta_{ij}$ $(\forall i, j)$ und sei $v = \sum_i x_i v_i$.
Dann $\|f(v)\|^2 = \|\sum_i x_i f(v_i)\|^2 = \sum_i |x_i|^2 = \|\sum_i x_i v_i\|^2 = \|v\|^2$.
Nach 13.2 ist f also orthogonal bzw. unitär.

Lemma 13.4.
Sei $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V und sei $f \in \mathsf{End}(V)$. Dann gilt:

f orthogonal (bzw. unitär) $\iff$ $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ orthogonal (bzw. unitär).

Beweis:
Sei $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = A = (a_{ij})$. Dann gilt: f orthogonal bzw. unitär $\overset{13.3}{\Leftrightarrow}$ $\forall k, l(\langle f(v_k), f(v_l)\rangle = \delta_{kl}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall k, l(\langle \sum_i a_{ik} v_i, \sum_j a_{jl} v_j\rangle = \delta_{kl}) \Leftrightarrow \forall k, l(\sum_i a_{ik}\overline{a_{il}} = \delta_{kl}) \Leftrightarrow {}^tA\overline{A} = E_n$.

Korollar. Ist $f \in \mathsf{End}(V)$ orthogonal bzw. unitär, so $|\det(f)| = 1$.

Lemma 13.5.
Ist $A \in O(2)$, so gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$, so daß $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

Im ersten Fall ist $A \in SO(2)$ und f_A eine *Drehung* um den Winkel α.
Im zweiten Fall ist $\det(A) = -1$ und f_A die *Spiegelung* an der Geraden $\mathbb{R}\cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

Beweis:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Dann $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$. Folglich gibt es $\alpha, \alpha' \in [0, 2\pi[$ mit $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \sin\alpha'$, $d = \cos\alpha'$. Weiter gilt dann $0 = ac + bd = \cos\alpha\sin\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha' = \sin(\alpha + \alpha')$, also $\alpha + \alpha' \in \{k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, d.h. $\alpha' \in \{-\alpha + k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und deshalb $\cos\alpha' = \cos\alpha$ & $\sin\alpha' = -\sin\alpha$ oder $\cos\alpha' = -\cos\alpha$ & $\sin\alpha' = \sin\alpha$. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung.

Für den Rest siehe §10, S.56.

Lemma 13.6.

Sei $A \in O(3)$. Dann ist $\lambda := \det(A) = \pm 1$ ein Eigenwert von A, und es gibt eine ONB $\overline{v}$ und ein $\alpha \in [0, 2\pi[$,

so daß $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f_A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Im Fall $\lambda = 1$ ist f_A eine Drehung mit Drehachse $\mathbb{R}v_1$ um den Winkel α.
Der Unterraum $\mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3$ wird in diesem Fall *Drehebene* genannt.

Im Fall $\lambda = -1$ gilt $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f_A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

f_A setzt sich also zusammen aus der Drehung um die Achse $\mathbb{R}v_1$ mit Winkel α und der Spiegelung an der Drehebene $\mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3$.

Beweis:

1. Wir zeigen, daß $\det(A)$ Eigenwert von A ist: Das charakteristische Polynom von A hat den Grad 3 und besitzt deshalb mindestens eine (reelle) Nullstelle λ. Man wähle eine ONB $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $Av_1 = \lambda v_1$. Die darstellende Matrix von f_A bzgl. dieser ONB hat die Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit $C \in O(2)$.
Es gilt also $\det(A) = \lambda \cdot \det(C)$ und somit $\det(A) = \lambda$, falls $\det(C) = 1$. Ist dagegen $\det(C) = -1$, so folgt mit 13.5, daß C und folglich auch A die Eigenwerte $1, -1$ hat.

2. Da wir jetzt schon wissen, daß $\det(A)$ Eigenwert von A ist, können wir in 1. o.E.d.A. $\lambda = \det(A)$ annehmen. Wegen $\det(A) = \lambda \cdot \det(C) \neq 0$ muß dann aber $\det(C) = 1$ und damit $C \in SO(n)$ sein. Nach 13.5 ist C also von der Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Satz 13.7.

Zu jedem unitären Endomorphismus f eines unitären Vektorraums V
existiert eine aus Eigenvektoren von f bestehende ONB von V.

Beweis durch Induktion nach $n = \dim(V)$:

Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $n \geq 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt das charakteristische Polynom P_f eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Nach 13.1d ist $|\lambda| = 1$. Sei v_1 ein Eigenvektor zu λ mit $\|v_1\| = 1$. Sei $U := \{v_1\}^\perp$. Nach 12.7 ist $V = \operatorname{span}(v_1) \oplus U$ und somit $\dim(U) = n - 1$. Wie man leicht sieht, gilt $f(U) \subseteq U$. $[u \in U \Rightarrow \lambda\langle v_1, f(u)\rangle = \langle \lambda v_1, f(u)\rangle = \langle f(v_1), f(u)\rangle = \langle v_1, u\rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, f(u)\rangle = 0]$. Folglich $g := f|U \in \mathsf{End}(U)$. Mit f ist auch g unitär. Also besitzt U nach I.V. eine ONB $(v_2, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren von g. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V aus Eigenvektoren von f.

Korollar.

Zu $A \in U(n)$ gibt es ein $S \in U(n)$ mit ${}^t\overline{S} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, wobei $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_i| = 1$ für $i = 1, ..., n$.

Beweis: Nach 13.3 ist $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ unitär. Also gibt es eine aus Eigenvektoren von f_A bestehende ONB $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ von $\mathbb{C}^n$. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte und S die Matrix $(v_1 \ \dots \ v_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist S unitär, d.h. $S^{-1} = {}^t\overline{S}$, und nach 10.4b gilt $S^{-1}AS = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Lemma 13.8.
Zu einem orthogonalen Endomorphismus f eines euklidischen Vektorraums V mit $\dim(V) \geq 1$ gibt es stets einen Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $f(W) = W$ und $1 \leq \dim(W) \leq 2$.

Beweis:
Sei $\overline{v}$ eine ONB von V und $A := \mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$. Wir betrachten den Endomorphismus $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $g(z) := Az$.
Da A orthogonal ist, ist g unitär. Sei $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $Az = \lambda z$.
Es gibt $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gilt $Ax + \mathrm{i}Ay = Az = \lambda z = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(x + \mathrm{i}y) = (\alpha x - \beta y) + \mathrm{i}(\beta x + \alpha y)$.
Wegen A reell folgt daraus $Ax = \alpha x - \beta y$ und $Ay = \beta x + \alpha y$. Wir haben also $f_A(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y) \subseteq \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$.
Daraus folgt $f(W) \subseteq W$, wobei $W := \Phi_{\overline{v}}(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y)$. Da f injektiv ist, gilt sogar $f(W) = W$.

Satz 13.9.
Ist f ein orthogonaler Endomophismus eines euklidischen Vektorraums V,
so gibt es eine ONB $\overline{v}$ von V derart, daß

$$\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \begin{pmatrix} +1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && +1 &&& \mathbf{0} &&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ && \mathbf{0} &&& -1 &&& \\ &&&&&& A_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& A_k \end{pmatrix},$$

wobei für $j = 1, ..., k$

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_j & -\sin\vartheta_j \\ \sin\vartheta_j & \cos\vartheta_j \end{pmatrix} \in SO(2)$$

mit $\vartheta_j \in \,]0, \pi[\, \cup \,]\pi, 2\pi[$.

Beweis durch Induktion nach $n = \dim(V)$:
Nach Lemma 13.8 existiert ein Unterraum $W \subseteq V$ mit $1 \leq \dim(W) \leq 2$ und $f(W) = W$. Nach 13.1c ist auch f^{-1} orthogonal. Also gilt für $w \in W$ und $v \in W^\perp$: $\langle f(v), w\rangle = \langle f^{-1}(f(v)), f^{-1}(w)\rangle = \langle v, f^{-1}(w)\rangle = 0$.
Es folgt $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$. Damit haben wir f zerlegt in zwei orthogonale Abbildungen $g := f|W \in \mathsf{End}(W)$ und $h := f|W^\perp \in \mathsf{End}(W^\perp)$. Wegen $\dim(W^\perp) < n$ können wir auf h die I.V. anwenden und erhalten eine Basis $\overline{v}'$ von $W^\perp$ der gewünschten Art.

Ist $\dim(W) = 1$, so gibt es einen Eigenvektor $v \in W$ mit $\|v\| = 1$ zu einem Eigenwert ± 1. Ergänzt man $\overline{v}'$ an passender Stelle durch v zu $\overline{v}$, so hat diese Basis von V die gewünschten Eigenschaften.

Im Fall $\dim(W) = 2$ gibt es eine ONB (v_1, v_2) von W, so $\mathcal{M}_{(v_1,v_2)}(g)$ eine der folgenden Formen hat
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ mit $\vartheta \in \,]0, \pi[\, \cup \,]\pi, 2\pi[$.
Indem man v_1 und v_2 an passenden Stellen in $\overline{v}'$ einfügt, erhält man eine Basis $\overline{v}$ der gewünschten Art.

Satz 13.10.
Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine (nicht notwendig lineare) Abbildung.
f heißt *Bewegung* oder *Isometrie*, wenn $\forall v, w \in V (\, \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\| \,)$.
Es gilt: f ist orthogonaler Endomorphismus $\iff$ f ist Bewegung mit $f(0) = 0$.

Beweis von "$\Leftarrow$":

(1) $\|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$.

(2) $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

Beweis: $\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle = \|v - w\|^2 = \|f(v) - f(w)\|^2 = \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - 2\langle f(v), f(w)\rangle \overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$.

(3) $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

Beweis: $\|f(v + w) - f(v) - f(w))\|^2 =$
$\|f(v + w)\|^2 + \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - 2\langle f(v + w), f(v)\rangle - 2\langle f(v + w), f(w)\rangle + 2\langle f(v), f(w)\rangle =$
$\|v + w\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v + w, v\rangle - 2\langle v + w, w\rangle + 2\langle v, w\rangle = \langle v + w - v - w, v + w - v - w\rangle = 0$.

(4) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. [Beweis wie für (3)]

Definition.
Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$.

Lemma 13.11.
Sei $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V und $f \in \mathsf{End}(V)$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f) = \big(\langle f(v_j), v_i\rangle\big)_{i,j}$.

(b) f selbstadjungiert $\iff$ $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ symmetrisch bzw. hermitesch.

Beweis :

(a) Nach der Entwicklungsformel gilt: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(v_j), v_i\rangle v_i$

(b) $\mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$ hermitesch $\overset{(a)}{\Leftrightarrow}$ $\langle f(v_i), v_j\rangle = \overline{\langle f(v_j), v_i\rangle}$ für alle i, j $\Leftrightarrow$ $\langle f(v_i), v_j\rangle = \langle v_i, f(v_j)\rangle$ für alle i, j $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$.

Lemma 13.12.
Für jeden selbstadjungierten Endomorphismus $f : V \to V$ gilt:

(a) Alle Nullstellen von P_f und damit alle Eigenwerte von f sind reell.

(b) $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ & $\lambda \neq \mu$ & $v \in \mathrm{Eig}(f; \lambda)$ & $w \in \mathrm{Eig}(f; \mu)$ $\Rightarrow$ $v \perp w$.

(c) $v \in \mathrm{Eig}(f; \lambda)$ $\Rightarrow$ $f(\{v\}^\perp) \subseteq \{v\}^\perp$ (d.h. $\{v\}^\perp$ ist f-*invariant*).

Beweis :

(a) Sei $n := \dim(V)$, $\overline{v}$ eine ONB von V und $A := \mathcal{M}_{\overline{v}}(f)$. Dann ist A hermitesch und $P_f = P_A$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P_f. Dann ist λ Eigenwert von $f_A \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^n)$, d.h. es gibt ein $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Az = \lambda z$. Dann gilt $\lambda\langle z, z\rangle = \langle \lambda z, z\rangle = \langle Az, z\rangle \overset{\text{A hermitesch}}{=} \langle z, Az\rangle = \langle z, \lambda z\rangle = \overline{\lambda}\langle z, z\rangle$, also $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) O.E.d.A. $v, w \neq 0$. Nach (a) gilt dann $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$\langle \lambda v, w\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle = \langle v, \mu w\rangle$ $\Rightarrow$ $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$ $\Rightarrow$ $\langle v, w\rangle = 0$.

(c) $w \in \{v\}^\perp$ $\Rightarrow$ $0 = \langle w, \lambda v\rangle = \langle w, f(v)\rangle = \langle f(w), v\rangle$ $\Rightarrow$ $f(w) \in \{v\}^\perp$.

Lemma 13.1(e)
Ist f orthogonal bzw. unitär und sind v, w Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ, μ von f, so $v \perp w$.

Beweis:
Annahme: $\langle v, w\rangle \neq 0$. $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle \lambda v, \mu w\rangle = \lambda\overline{\mu}\langle v, w\rangle$ $\Rightarrow$ $\lambda\overline{\mu} = 1$ $\Rightarrow$ $\lambda \overset{13.1\text{d}}{=} \lambda|\mu|^2 = \lambda\overline{\mu}\mu = \mu$.

Satz 13.13 (Hauptachsentransformation).
Ist $f \in \mathsf{End}(V)$ selbstadjungiert, so besitzt V eine ONB aus Eigenvektoren von f.

Beweis durch Induktion nach $n = \dim(V)$:
Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $n \geq 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt P_f eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Nach 13.12a ist λ reell und damit auf jeden Fall Eigenwert von f. Sei v_1 ein Eigenvektor von f. O.E.d.A. $\|v_1\| = 1$. Sei $U := \{v_1\}^\perp$. Nach 12.7 gilt $V = \mathrm{span}(v_1) \oplus U$ und somit $\dim(U) = n - 1$. Nach 13.12c ist $g := f|U \in \mathsf{End}(U)$. Mit f ist auch g selbstadjungiert. Also besitzt U nach I.V. eine ONB $(v_2, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren von g. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V aus Eigenvektoren von f.

Korollar.
Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ symmetrisch bzw. hermitesch, so gibt es ein $S \in O(n)$ bzw. $U(n)$, so daß ${}^t\overline{S}AS = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Beispiel.
$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}$$
Wie man leicht nachrechnet ist $A \in SO(3)$ und $P_A = -t^3 - t^2 + t + 1 = -(t-1)(t+1)^2$.
$$\mathrm{Eig}(A;1) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ denn: } \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 5 & -29 & 2 \\ 10 & 2 & -26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Eig}(A;-1) = \mathrm{Eig}(A;1)^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad \left[\begin{pmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ ist ONB aus EV. } S = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, {}^tSAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel
Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\beta \neq 0$. Frage: Welche geometrische Gestalt hat die Menge $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : {}^txAx = 1\}$.
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt ${}^txAx = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \alpha x_2^2$.
Bestimmung einer ONB aus Eigenvektoren:
$P_A = t^2 - 2\alpha t + (\alpha^2 - \beta^2)$. Eigenwerte: $\lambda_1 = \alpha + \beta$, $\lambda_2 = \alpha - \beta$.
$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}, v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
$$S := (v_1\ v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad D := {}^tSAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : {}^txAx = 1\} = \{Sy : y \in \mathbb{R}^2 \ \&\ {}^t(Sy)A(Sy) = 1\} = \{Sy : y \in \mathbb{R}^2 \ \&\ {}^tyDy = 1\} =$$
$$= \{y_1 v_1 + y_2 v_2 : \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1\} \overset{(*)}{=} \{y_1 v_1 + y_2 v_2 : \frac{y_1^2}{a^2} \pm \frac{y_2^2}{b^2} = 1\}.$$
$(*)$ Ist $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \neq 0$, so setzen wir $a := \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ und $b := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$.
Im Fall $+$ ist Q eine Ellipse, im Fall $-$ eine Hyperbel, a und b sind jeweils die *Hauptachsen*.
$$Q = f_S[Q_0] \text{ mit } Q_0 = \{y \in \mathbb{R}^2 : {}^tyDy = 1\} = \{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : \frac{y_1^2}{a^2} \pm \frac{y_2^2}{b^2} = 1\}.$$

§14 Hauptachsentransformation für symmetrische Bilinearformen

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und σ eine symmetrische Bilinearform auf V.

$V_0^\sigma := \{w \in V : \sigma(v,w) = 0$ für alle $v \in V\}$ (*Ausartungsraum* von σ)

$r_+(\sigma) := \max\{\dim(W) : W$ Untervektorraum von V & $\forall v \in W \setminus \{0\}(\sigma(v,v) > 0)\}$,

$r_-(\sigma) := \max\{\dim(W) : W$ Untervektorraum von V & $\forall v \in W \setminus \{0\}(\sigma(v,v) < 0)\}$.

Satz 14.1 (Trägheitsgesetz von Sylvester).
Für jede Zerlegung $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0^\sigma$ mit $\forall v \in V_+ \setminus \{0\}(\sigma(v,v) > 0)$ & $\forall v \in V_- \setminus \{0\}(\sigma(v,v) < 0)$ gilt $r_+(\sigma) = \dim(V_+)$ und $r_-(\sigma) = \dim(V_-)$.

Beweis:
Hilfssatz: Für jede Unterraum W von V mit $\forall v \in W \setminus \{0\}(\sigma(v,v) > 0)\}$ gilt $W \cap (V_0^\sigma \oplus V_-) = \{0\}$ und folglich $\dim(V_0^\sigma) + \dim(V_-) + \dim(W) = \dim(W + (V_0^\sigma \oplus V_-)) \leq n$.
Beweis:
$w = v_0 + v_1$ & $v_0 \in V_0^\sigma$ & $v_1 \in V_- \Rightarrow \sigma(w,w) = \sigma(v_0,w) + \sigma(v_1,v_0) + \sigma(v_1,v_1) = \sigma(v_1,v_1) \leq 0 \Rightarrow w = 0$.

Aus Hilfssatz folgt $r_+(\sigma) \leq n - \dim(V_0^\sigma) - \dim(V_-) = \dim(V_+) \leq r_+(\sigma)$, also $r_+(\sigma) = \dim(V_+)$.
Ebenso zeigt man $r_-(\sigma) = \dim(V_-)$.

Bemerkung. $r_+(\sigma)$ nennt man zuweilen den *Index* und $r_+(\sigma) - r_-(\sigma)$ die *Signatur* von σ.

Satz 14.2.
Sei $\overline{v}$ eine Basis von V und $A := \mathcal{M}_{\overline{v}}(\sigma)$. Nach 12.10 ist A symmetrisch. Nach 13.13 existiert eine aus Eigenvektoren von f_A bestehende ONB $\overline{u}' = (u_1', ..., u_n')$ von $\mathbb{R}^n$, so daß für die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ gilt $\lambda_1, ..., \lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_m < 0$, $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Sei $\overline{w} := (w_1, ..., w_n)$ mit $w_i := \Phi_{\overline{v}}(u_i)$, $u_i := \alpha_i u_i'$, $\alpha_i := \begin{cases} |\lambda_i|^{-\frac{1}{2}} & \text{für } i = 1, ..., m \\ 1 & \text{für } i = m{+}1, ..., n \end{cases}$.
$W_+ := \mathrm{span}(w_1, ..., w_k)$, $W_- := \mathrm{span}(w_{k+1}, ..., w_m)$.

Dann gilt:

(a) $\sigma(w_i, w_j) = \mu_j \cdot \delta_{ij}$ mit $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 1$ & $\mu_{k+1} = \ldots = \mu_m = -1$ & $\mu_{m+1} = \ldots = \mu_n = 0$.

(b) $V_0^\sigma = \mathrm{span}(w_{m+1}, ..., w_n)$ und folglich $V = W_+ \oplus W_- \oplus V_0^\sigma$.

(c) $\forall v \in W_+ \setminus \{0\}(\sigma(v,v) > 0)$ & $\forall v \in W_- \setminus \{0\}(\sigma(v,v) < 0)$.

(d) $r_+(\sigma) = k$ und $r_-(\sigma) = m - k$.

(e) $r_+(\sigma) + r_-(\sigma) + \dim(V_0^\sigma) = \dim(V)$.

(f) $\mathcal{M}_{\overline{w}}(\sigma) = \begin{pmatrix} E_{r_+(\sigma)} & & 0 \\ & -E_{r_-(\sigma)} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

(g) σ positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv.

Beweis:
(a) $\sigma(w_i, w_j) \overset{(*)}{=} {}^t u_i A u_j = \alpha_i \alpha_j \cdot {}^t u_i' A u_j' = \alpha_i \alpha_j \lambda_j \cdot {}^t u_i' u_j' = \begin{cases} +1 & \text{für } 1 \leq i = j \leq k \\ -1 & \text{für } k < i = j \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

$(*)$ $\sigma(\Phi_{\overline{v}}(x), \Phi_{\overline{v}}(y)) = \sigma(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j v_j) = \sum_{i,j} x_i \sigma(v_i, v_j) y_j = {}^t x A y$ (siehe Bemerkung vor L.12.11)

(b) "$\supseteq$": $\forall i \in \{m+1, ..., n\} \forall v \in V(\sigma(w_i, v) = 0) \;\Rightarrow\; w_{m+1}, ..., w_n \in V_0^\sigma \;\Rightarrow\; \mathrm{span}(w_{m+1}, ..., w_n) \subseteq V_0^\sigma$.

"$\subseteq$": $w = \sum_{i=1}^n x_i w_i \;\&\; \forall v \in V(\sigma(w, v) = 0) \Rightarrow \forall j \in \{1, ..., m\}(0 = \sigma(w, w_j) = \sum_{i=1}^n x_i \sigma(w_i, w_j) = \pm x_j)$.

(c) $v = \sum_{i=1}^k x_i w_i \neq 0 \;\Rightarrow\; \sigma(v, v) = \sum_{i=1}^k x_i^2 > 0$. $\quad v = \sum_{i=k+1}^m x_i w_i \neq 0 \;\Rightarrow\; \sigma(v, v) = \sum_{i=1}^k -x_i^2 < 0$.

(d), (e), (f) folgen aus (a),(b),(c) und 14.4

(g) Für $v = \sum_{i=1}^n x_i w_i$ ist $\sigma(v, v) = \sum_{i=1}^n \sigma(w_i, w_i) x_i^2 = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_m^2$.

Daraus folgt: $\forall v \in V \setminus \{0\}(\sigma(v, v) > 0) \;\Leftrightarrow\; k = m = n$.

Lemma 14.3.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit,
wenn ihre Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ positiv sind.

Beweis:

Sei $\overline{w} = (w_1, ..., w_n)$ eine ONB mit $Aw_i = \lambda_i w_i$ für $i = 1, ..., n$.

Für $v = \sum_{i=1}^n x_i w_i$ ist dann ${}^t v A v = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Daraus folgt: $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}({}^t v A v > 0) \;\Leftrightarrow\; \lambda_1, ..., \lambda_n > 0$.

Lemma 14.4.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $S \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$. Dann haben A und ${}^t SAS$ mit Vielfachheiten gezählt die gleichen Zahlen von positiven und negativen Eigenwerten.

Beweis:

Sei $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\sigma(x, y) := {}^t x A y$. Dann $A = \mathcal{M}_{\overline{v}}(\sigma)$, wobei $\overline{v}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Seien $w_1, ..., w_n$ die Spalten von S. Dann ist $\overline{w} := (w_1, ..., w_n)$ Basis von $\mathbb{R}^n$ und ${}^t SAS = \mathcal{M}_{\overline{w}}(\sigma)$, denn ${}^t e_i ({}^t SAS) e_j = {}^t w_i A w_j = \sigma(w_i, w_j)$. Mit 14.2 folgt für $C \in \{A\,,\, {}^t SAS\}$:

Zahl der positiven/negativen EW von $C \; = r_{+/-}(\sigma)$

Satz 14.5 (Orthogonalisierungssatz).

Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, wobei $\mathrm{char}(K) \neq 2$, und σ eine symmetrische Bilinearform auf V, so existiert eine Basis $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ von V mit $\sigma(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$.

Ist $q : V \to K$, $q(v) := \sigma(v, v)$ die zugehörige quadratische Form, so gilt $q(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \sum_{i=1}^n q(v_i) x_i^2$.

Beweis durch Induktion nach n:

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial.

Ist $q(v) = 0$ für alle $v \in V$, so $\sigma(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)) = 0$ für alle $v, w \in V$.

Andernfalls gibt es ein $v_1 \in V$ mit $q(v_1) \neq 0$. Sei $W := \{w \in V : \sigma(v_1, w) = 0\}$.

Hilfssatz. $V = Kv_1 \oplus W$.

Beweis: 1. $v \in Kv_1 \cap W \;\Rightarrow\; v = \lambda v_1 \;\&\; 0 = \sigma(v_1, v) = \lambda \sigma(v_1, v_1) \;\Rightarrow\; \lambda = 0 \;\Rightarrow\; v = 0$.

2. $v \in V \;\&\; v' := \dfrac{\sigma(v_1, v)}{\sigma(v_1, v_1)}\, v_1 \Rightarrow v = v' + (v - v')$ und $\sigma(v_1, v - v') = \sigma(v_1, v) - \sigma(v_1, v') = 0$, also $v - v' \in W$.

Nach I.V. existiert eine Basis $(v_2, ..., v_n)$ von W mit $\sigma(v_i, v_j) = 0$ für $i, j \in \{2, ..., n\}$ mit $i \neq j$.

Folglich ist $\overline{v} := (v_1, v_2, ..., v_n)$ von der gewünschten Art.

§15 Dualräume

Im folgenden seien V, W stets endlichdimensionale K-Vektorräume.

Lemma 15.1. (Nachtrag zu §7)

(a) Ist $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ Basis von V und $\overline{w} = (w_1, ..., w_m)$ Basis von W,
so ist die Abbildung $\mathcal{M}^{\overline{v}}_{\overline{w}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to K^{m\times n}$, $f \mapsto \mathcal{M}^{\overline{v}}_{\overline{w}}(f)$ ein Isomorphismus.

(b) $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim(V)\cdot \dim(W)$

Definition.
Ist V ein K-Vektorraum, so heißt $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ der *Dualraum* von V.
Die Elemente von V^* heißen *Linearformen* auf V.

Beispiel.
Ist V der Vektorraum der auf $[a, b]$ differenzierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so sind
$\sigma : V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int\limits_a^b f(x)dx$ und, für $c \in (a, b)$, $\delta_c : V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \dfrac{df}{dx}(c)$ Linearformen auf V.

Definition.
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so sei $v_i^* \in V^*$ definiert durch $v_i^*(v_j) := \delta_{ij}$.
Man nennt $(v_1^*, ..., v_n^*)$ die zu $(v_1, ..., v_n)$ *duale Basis* von V^*.

Lemma 15.2.
(a) $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von $V \implies (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ Basis von V^* .
(b) $0 \neq v \in V \implies$ es gibt $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$.

Beweis :
(a) 1. $\dim(V^*) = \dim(V) = n$.
2. $(v_1^*, ..., v_n^*)$ linear unabhängig: $\sum_i \lambda_i v_i^* = 0 \Rightarrow 0 = (\sum_i \lambda_i v_i^*)(v_j) = \sum_i \lambda_i v_i^*(v_j) = \lambda_j$.
(b) Man ergänze $v_1 := v$ zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und setze (z.B.) $\varphi(v_i) := 1$.

Definition.
Ist U ein Unterraum von V, so heißt $U^0 := \{\varphi \in V^* : \forall u \in U(\varphi(u) = 0)\}$
der zu U *orthogonale* Raum (oder der *Annulator* von U). U^0 ist ein Unterraum von V^*.

Satz 15.3.
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $U = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$ mit $k \leq n$, so gilt:
(a) $(v_{k+1}^*, ..., v_n^*)$ ist Basis von U^0.
(b) $\dim(U^0) = \dim(V) - \dim(U)$.

Beweis :
(a) 1. $k < i \leq n \Rightarrow v_i^*(v_j) = 0$ für $j = 1, ..., k \Rightarrow v_i^* \in U^0$.
2. $(v_{k+1}^*, \ldots, v_n^*)$ linear unabhängig: siehe 15.2a.
3. $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^* \in U^0 \Rightarrow \forall j \in \{1, ..., k\}\big(0 = \varphi(v_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^*(v_j) = \lambda_j\big) \Rightarrow \varphi \in \mathrm{span}(v_{k+1}^*, ..., v_n^*)$.
(b) folgt aus (a).

Definition.

Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ sei $f^* : W^* \to V^*,\ f^*(\psi) := \psi \circ f$ *(die zu f duale Abbildung)*

Lemma 15.4.

(a) $f \in \operatorname{Hom}(V, W) \implies f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$.

(b) Ist $\overline{v}$ Basis von V und $\overline{w}$ Basis von W, so gilt $\mathcal{M}^{\overline{w}^*}_{\overline{v}^*}(f^*) = {}^t\mathcal{M}^{\overline{v}}_{\overline{w}}(f)$ für alle $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

(c) Die Abbildung $\operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$, $f \mapsto f^*$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis:

(a) Für alle $\psi, \psi' \in W^*$, $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt:

(1) $(\psi + \psi')(f(v)) = \psi(f(v)) + \psi'(f(v)) = (\psi \circ f)(v) + (\psi' \circ f)(v) = (\psi \circ f + \psi' \circ f)(v)$ und

(2) $(\lambda\psi)(f(v)) = \lambda(\psi(f(v))) = \lambda(f^*(\psi)(v)) = (\lambda f^*(\psi))(v)$.

Daraus folgt:

$f^*(\psi + \psi') = (\psi + \psi') \circ f \overset{(1)}{=} \psi \circ f + \psi' \circ f = f^*(\psi) + f^*(\psi')$ und $f^*(\lambda\psi) = (\lambda\psi) \circ f \overset{(2)}{=} \lambda(\psi \circ f) = \lambda f^*(\psi)$.

(b) Sei $\mathcal{M}^{\overline{v}}_{\overline{w}}(f) = (a_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$ und $\mathcal{M}^{\overline{w}^*}_{\overline{v}^*}(f^*) = (b_{ji})_{j,i} \in K^{n \times m}$.

Dann $f(v_j) = \sum_l a_{lj} w_l$ & $f^*(w_i^*) = \sum_l b_{li} v_l^*$ und folglich $a_{ij} = w_i^*(f(v_j)) = f^*(w_i^*)(v_j) = b_{ji}$.

(c) Nach (b) gilt $f^* = (\mathcal{M}^{\overline{w}^*}_{\overline{v}^*})^{-1}\big({}^t\mathcal{M}^{\overline{v}}_{\overline{w}}(f)\big)$. Nach Lemma 6.9a ist die Abbildung $K^{m \times n} \to K^{n \times m}$, $A \mapsto {}^tA$ ein Isomorphismus. Zusammen mit Lemma 15.1a folgt daraus die Behauptung.

Satz 15.5.

$f \in \operatorname{Hom}(V, W) \implies \operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Im}(f)^0$ und $\operatorname{Im}(f^*) = \operatorname{Ker}(f)^0$.

Beweis:

1. $\psi \in \operatorname{Ker}(f^*) \Leftrightarrow f^*(\psi) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V(f^*(\psi)(v) = 0) \Leftrightarrow \forall v \in V(\psi(f(v)) = 0) \Leftrightarrow \psi \in \operatorname{Im}(f)^0$.

2. $\varphi \in \operatorname{Im}(f^*) \Rightarrow \exists \psi \in W^*(\varphi = \psi \circ f) \Rightarrow \forall v \in V(f(v) = 0 \Rightarrow \varphi(v) = 0) \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Ker}(f)^0$.

$\dim \operatorname{Im}(f^*) = \dim(W^*) - \dim \operatorname{Ker}(f^*) \overset{1.}{=} \dim(W) - \dim(\operatorname{Im}(f)^0) \overset{15.3b}{=} \dim \operatorname{Im}(f) =$
$= \dim(V) - \dim \operatorname{Ker}(f) \overset{15.3b}{=} \dim(\operatorname{Ker}(f)^0)$.

Korollar 1.

$\operatorname{rang}(f^*) = \operatorname{rang}(f)$ für alle $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

Korollar 2.

$\operatorname{Zeilenrang}(A) = \operatorname{Spaltenrang}(A)$ für alle $A \in K^{m \times n}$.

Beweis:

Sei $A \in K^{m \times n}$, $\overline{v}$ die Standardbasis von K^n und $\overline{w}$ die Standardbasis von K^m.

Dann ist $A = \mathcal{M}^{\overline{v}}_{\overline{w}}(f_A)$ und somit (nach 15.4b) ${}^tA = \mathcal{M}^{\overline{w}^*}_{\overline{v}^*}({f_A}^*)$ (+).

$\operatorname{Zeilenrang}(A) = \dim \operatorname{ZR}(A) = \dim \operatorname{SR}({}^tA) \overset{6.1a}{=} \operatorname{rang}({}^tA) \overset{\text{L.8.12, (+)}}{=} \operatorname{rang}({f_A}^*) = \operatorname{rang}(f_A) = \operatorname{rang}(A)$.

Definition.

$V^{**} := (V^*)^*$ (Bidualraum von V)

$\ell_V : V \to V^{**}$, $\ell_V(v)(\varphi) := \varphi(v)$ (kanonische Abbildung)

Satz 15.6.

(a) Die kanonische Abbildung $\ell_V : V \to V^{**}$ ist ein Isomorphismus.

(b) Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ gilt: $(U^0)^0 = \ell_V(U)$.

(c) Für jedes $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ gilt: $f^{**} \circ \ell_V = \ell_W \circ f$.

Beweis :

(a) 1. ℓ_V linear: $\ell_V(v_1+v_2)(\varphi) = \varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1)+\varphi(v_2) = \ell_V(v_1)(\varphi)+\ell_V(v_2)(\varphi) = (\ell_V(v_1)+\ell_V(v_2))(\varphi)$ und $\ell_V(\lambda v)(\varphi) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda \cdot \ell_V(v)(\varphi) = (\lambda\ell_V(v))(\varphi)$.

2. ℓ_V injektiv: $\ell_V(v) = 0 \Rightarrow \varphi(v) = 0$ für alle $\varphi \in V^* \overset{\text{L.15.2b}}{\Rightarrow} v = 0$.

(b) 1. $\ell_V(U) \subseteq (U^0)^0$, denn $\forall v \in U \forall\varphi \in U^0(\ell_V(v)(\varphi) = \varphi(v) = 0)$.

2. $\dim(U^0)^0 = \dim(V^*) - \dim(U^0) = \dim(V) - (\dim(V) - \dim(U)) = \dim(U) = \dim\ell_V(U)$.

(c) $f^{**}(\ell(v))(\psi) = (\ell(v) \circ f^*)(\psi) = \ell(v)(f^*(\psi)) = \ell(v)(\psi \circ f) = \psi(f(v)) = \ell(f(v))(\psi)$.

Definition. Für $W \subseteq V^*$ sei $W^{0'} := \{v \in V : \forall\varphi \in W(\varphi(v) = 0)\}$.

Dann gilt: $\ell_V(W^{0'}) = \{\ell_V(v) : v \in V \ \&\ \forall\varphi \in W(\ell_V(v)(\varphi) = 0)\} = W^0$.

Korollar. Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ gilt $(U^0)^{0'} = U$.

Beweis: $\ell_V((U^0)^{0'}) = (U^0)^0 \overset{15.6b}{=} \ell_V(U) \overset{15.6a}{\Rightarrow} (U^0)^{0'} = U$.

Jedem $a \in K^{1\times n}$ ist eine lineare Abbildung $f_a : K^n \to K,\ f_a(x) = a{\cdot}x$ zugeordnet.
Die Zuordnung $a \mapsto f_a$ ist ein Isomorphismus von K^n auf $(K^n)^*$. (Vergl. Lemmata 5.1, 15.1a)
Man kann deshalb $a \in K^{1\times n}$ mit $f_a \in (K^n)^*$ identifizieren.

Für $A \in K^{m\times n}$ mit den Zeilen $a_1, ..., a_m$ gilt:

$\mathrm{Lös}(A;0) = \{x \in K^n : a_i x = 0 \text{ für } i = 1, ..., m\} = \{x \in K^n : \forall y \in \mathrm{ZR}(A)(y{\cdot}x = 0)\} = \mathrm{ZR}(A)^{0'}$.

Sei U ein Teilraum von K^n. Gesucht: Matrix A mit $U = \mathrm{Lös}(A;0)$, d.h. $U = \mathrm{ZR}(A)^{0'}$.

Dazu bestimmen wir A derart, dass $\mathrm{ZR}(A) = U^0$. Nach obigem Korollar ist dann $\mathrm{ZR}(A)^{0'} = U$.

Sei $U = \mathrm{span}(b_1, ..., b_l)$. Dann gilt $U^0 = \{{}^t x : x \in K^n \ \&\ {}^t B{\cdot}x = 0)\}$ mit $B := (b_1 \ \dots \ b_l)$.

Beweis: $U^0 = \{y \in K^{1\times n} : \forall x \in U(yx = 0)\} = \{y \in K^{1\times n} : yb_i = 0 \text{ für } i = 1, ..., l\} =$
$= \{y \in K^{1\times n} : {}^t b_i {}^t y = 0 \text{ für } i = 1, ..., l\} = \{{}^t x : x \in K^n \ \&\ {}^t b_i x = 0 \text{ für } i = 1, ..., l\} = \{{}^t x : {}^t B{\cdot}x = 0)\}$.

Beispiel.

$U = \mathrm{span}(b_1, b_2)$ mit $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$. $\qquad {}^t B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

$U^0 = \{{}^t x : x \in \mathrm{Lös}({}^t B;0)\} = \mathbb{R}{\cdot}(-1\ \ 1\ \ 1\ \ 0) + \mathbb{R}{\cdot}(-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1) = \mathrm{ZR}(A)$ mit $A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Für den Rest des Paragaphen seien V, W endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorräume.

Definition. $\Psi_V : V \to V^*$, $\Psi_V(v) := \langle \cdot, v \rangle$, d.h. $\Psi(v)(v') = \langle v', v \rangle$ für alle $v, v' \in V$.

Lemma 15.7.
(a) Ist $\overline{v} = (v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V und $\overline{v}^*$ die zugehörige duale Basis, so gilt $\Psi_V(v_i) = v_i^*$.
(b) Ψ_V ist semilinear und bijektiv.
(c) $\Psi_V(U^\perp) = U^0$ für jeden Unterraum U von V.

Beweis :
(a) $\Psi_V(v_i)(v_j) = \langle v_j, v_i \rangle = \delta_{ij} = v_i^*(v_j)$.
(b) 1. Ψ semilinear: $\Psi(v_1 + v_2)(w) = \langle w, v_1 + v_2 \rangle = \langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle = \Psi(v_1)(w) + \Psi(v_2)(w) =$
$= (\Psi(v_1) + \Psi(v_2))(w)$. $\Psi(\lambda v)(w) = \langle w, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle w, v \rangle = \overline{\lambda} \cdot \Psi(v)(w) = (\overline{\lambda} \Psi(v))(w)$.
2. Ψ injektiv: $\Psi(v) = \Psi(v') \Rightarrow \forall w \in V(\langle w, v \rangle = \langle w, v' \rangle) \Rightarrow v = v'$.
3. Ψ surjektiv: Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V. Für $\varphi \in V^*$ setze $v_\varphi := \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(v_i)} v_i$. Dann gilt:
$\Psi(v_\varphi)(v_j) = \langle v_j, \sum_i \overline{\varphi(v_i)} v_i \rangle = \sum_i \varphi(v_i) \langle v_j, v_i \rangle = \varphi(v_j)$. Also $\Psi(v_\varphi) = \varphi$.
(c) $\Psi(v) \in \Psi(U^\perp) \overset{\Psi \text{ inj.}}{\Leftrightarrow} v \in U^\perp \Leftrightarrow \forall u \in U(\langle u, v \rangle = 0) \Leftrightarrow \forall u \in U(\Psi(v)(u) = 0) \Leftrightarrow \Psi(v) \in U^0$.
Da Ψ surjektiv ist, folgt hieraus die Behauptung.

Definition. Für $f \in \text{Hom}(V, W)$ sei $f^{\text{ad}} := \Psi_V^{-1} \circ f^* \circ \Psi_W : W \to V$ *(die zu f adjungierte Abbildung)*

Satz 15.8.
Für $f \in \text{Hom}(V, W)$ gilt:
$f^{\text{ad}} : W \to V$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $\forall v \in V, w \in W\big(\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^{\text{ad}}(w) \rangle\big)$.

Bemerkung. Es gilt auch $\forall v \in V, w \in W(\langle w, f(v) \rangle = \langle f^{\text{ad}}(w), v \rangle)$, sowie $(f^{\text{ad}})^{\text{ad}} = f$.

Beweis :
$\Psi_V \circ f^{\text{ad}} = f^* \circ \Psi_W \Rightarrow \langle \cdot, f^{\text{ad}}(w) \rangle = \Psi_V(f^{\text{ad}}(w)) = \Psi_W(w) \circ f \Rightarrow \langle v, f^{\text{ad}}(w) \rangle = \Psi_W(w)(f(v)) = \langle f(v), w \rangle$.
Eindeutigkeit: $\forall v \in V \forall w \in W(\langle v, f^{\text{ad}}(w) \rangle = \langle v, f'(w) \rangle) \Rightarrow \forall w \in W(f^{\text{ad}}(w) = f'(w)) \Rightarrow f^{\text{ad}} = f'$.
Linearität: f^* linear und Ψ_V^{-1}, Ψ_W semilinear $\Rightarrow \Psi_V^{-1} \circ f^* \circ \Psi_W$ linear.

Lemma 15.9.
Ist $\overline{v}$ eine ONB von V und $\overline{w}$ eine ONB von W, so gilt für jedes $f \in \text{Hom}(V, W)$: $\mathcal{M}_{\overline{v}}^{\overline{w}}(f^{\text{ad}}) = {}^t\overline{\mathcal{M}_{\overline{w}}^{\overline{v}}(f)}$.

Beweis :
$\mathcal{M}_{\overline{w}}^{\overline{v}}(f) = (a_{ij})$ und $\mathcal{M}_{\overline{v}}^{\overline{w}}(f^{\text{ad}}) = (b_{ij}) \implies f^{\text{ad}}(w_j) = \sum_{l=1}^n b_{lj} v_l$ und $f(v_i) = \sum_{l=1}^m a_{li} w_l \implies$
$\implies b_{ij} = \langle f^{\text{ad}}(w_j), v_i \rangle = \langle w_j, f(v_i) \rangle = \overline{\langle f(v_i), w_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$.

Lemma 15.10.
Für $f \in \text{Hom}(V, W)$ gilt $\text{Im}(f^{\text{ad}}) = \text{Ker}(f)^\perp$ und $\text{Ker}(f^{\text{ad}}) = \text{Im}(f)^\perp$.

Beweis :
Nach 15.5 ist $\text{Ker}(f^*) = \text{Im}(f)^0$ und $\text{Im}(f^*) = \text{Ker}(f)^0$.
Nach 15.7c ist $\Psi_V(U^\perp) = U^0$ für jeden Unterraum $U \subseteq V$.
Daraus folgt: $\Psi_V(\text{Ker}(f)^\perp) = \text{Ker}(f)^0 = \text{Im}(f^*) = f^*(\Psi_W(W))$ und weiter
$\text{Ker}(f)^\perp = \Psi_V^{-1}(f^*(\Psi_W(W))) = f^{\text{ad}}(W) = \text{Im}(f^{\text{ad}})$.

Bemerkung. $f \in \mathsf{End}(V)$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $f^{\mathrm{ad}} = f$.

Definition. $f \in \mathsf{End}(V)$ heißt *normal*, wenn $f \circ f^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} \circ f$.

Bemerkung. (a) f unitär $\Rightarrow$ f normal. (b) f selbstadjungiert $\Rightarrow$ f normal.

Beweis von (a): $\langle f(v), w\rangle = \langle f(v), f(f^{-1}(w))\rangle = \langle v, f^{-1}(w)\rangle \;\Rightarrow\; f^{-1} = f^{\mathrm{ad}}$.

Lemma 15.11. $f \in \mathsf{End}(V)$ normal $\Longrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f^{\mathrm{ad}}) = \mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f^{\mathrm{ad}}) = \mathrm{Im}(f)$.

Beweis :

1. Wegen $\langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f^{\mathrm{ad}}(f(v))\rangle = \langle v, f(f^{\mathrm{ad}}(v))\rangle = \langle f^{\mathrm{ad}}(v), f^{\mathrm{ad}}(v)\rangle$ gilt $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^{\mathrm{ad}})$.
2. $\mathrm{Im}(f^{\mathrm{ad}}) \overset{15.10}{=} \mathrm{Ker}(f)^{\perp} \overset{1.}{=} \mathrm{Ker}(f^{\mathrm{ad}})^{\perp} \overset{15.10}{=} \mathrm{Im}((f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}}) = \mathrm{Im}(f)$.

Lemma 15.12. $f \in \mathsf{End}(V)$ normal $\Rightarrow$ $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \mathrm{Eig}(f^{\mathrm{ad}}, \overline{\lambda})$.

Beweis :

Sei $g := f - \lambda \mathrm{id}_V$.

(1) $g^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} - \overline{\lambda}\cdot\mathrm{id}_V$. [Bew.: $\langle g(v), w\rangle = \langle f(v), w\rangle - \lambda\langle v, w\rangle = \langle v, f^{\mathrm{ad}}(w)\rangle - \langle v, \overline{\lambda}w\rangle = \langle v, f^{\mathrm{ad}}(w) - \overline{\lambda}w\rangle$]

(2) g normal. [$g^{\mathrm{ad}} \circ g = (f^{\mathrm{ad}} - \overline{\lambda}\mathrm{id}) \circ (f - \lambda\mathrm{id}) = f^{\mathrm{ad}}\circ f - \lambda f^{\mathrm{ad}} - \overline{\lambda} f + \overline{\lambda}\lambda\mathrm{id} = f \circ f^{\mathrm{ad}} - \lambda f^{\mathrm{ad}} - \overline{\lambda} f + \lambda\overline{\lambda}\mathrm{id} =$
$= (f - \lambda\mathrm{id}) \circ (f^{\mathrm{ad}} - \overline{\lambda}\mathrm{id}) = g \circ g^{\mathrm{ad}}$]

$\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(g^{\mathrm{ad}}) \overset{(1)}{=} \mathrm{Ker}(f^{\mathrm{ad}} - \overline{\lambda}\cdot\mathrm{id}_V) = \mathrm{Eig}(f^{\mathrm{ad}}, \overline{\lambda})$.

Satz 15.13. Ist V unitär, so gilt für alle $f \in \mathsf{End}(V)$: f normal $\Longleftrightarrow$ V besitzt ONB aus EV von f.

Beweis:

"$\Leftarrow$": Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB und gelte $f(v_i) = \lambda_i v_i$.

Dann $f^{\mathrm{ad}}(v_i) = \sum_j \langle f^{\mathrm{ad}}(v_i), v_j\rangle v_j = \sum_j \overline{\langle f(v_i), v_j\rangle} v_j = \overline{\lambda_i} v_i$ und folglich $(f \circ f^{\mathrm{ad}})(v_i) = \lambda_i\overline{\lambda_i} v_i = (f^{\mathrm{ad}} \circ f)(v_i)$.

"$\Rightarrow$": Induktion nach $n = \dim(V)$. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $n \geq 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt das charakteristische Polynom P_f eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei v_1 ein Eigenvektor zu λ mit $\|v_1\| = 1$. Sei $U := \{v_1\}^{\perp}$. Nach 12.7 ist $V = \mathrm{span}(v_1) \oplus U$ und somit $\dim(U) = n - 1$.

Hilfssatz 1: $f(U) \subseteq U$ und somit $g := f|U \in \mathsf{End}(U)$.

Beweis: $u \in U \Rightarrow \langle f(u), v_1\rangle = \langle u, f^{\mathrm{ad}}(v_1)\rangle \overset{15.12}{=} \langle u, \overline{\lambda} v_1\rangle = \lambda\langle u, v_1\rangle = 0$.

Hilfssatz 2: $f^{\mathrm{ad}}(U) \subseteq U$. Beweis: $u \in U \Rightarrow \langle v_1, f^{\mathrm{ad}}(u)\rangle = \langle f(v_1), u\rangle = \langle \lambda v_1, u\rangle = 0$.

Aus HS1 und HS2 folgt $g^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}}|U$.

[$\forall u, v \in U(\langle g(v), u\rangle = \langle f(v), u\rangle = \langle v, f^{\mathrm{ad}}(u)\rangle \;\&\; f^{\mathrm{ad}}(u) \in U) \Rightarrow \forall u \in U(g^{\mathrm{ad}}(u) = f^{\mathrm{ad}}(u))$]

Da f normal ist, ist also auch g normal. Nach I.V. besitzt U somit eine ONB $(v_2, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren von g. Dann ist $(v_1, v_2, ..., v_n)$ eine ONB von V aus Eigenvektoren von f.

Korollar. Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt:

$A \cdot {}^t\overline{A} = {}^t\overline{A} \cdot A \;\Leftrightarrow$ es existiert $S \in U(n)$, so daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

§16 Affine Unterräume

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

Definition.
Ist $p \in V$ und U ein Untervektorraum von V,
so nennt man die Menge $M := p + U$ einen *affinen Unterraum* von V.
Ist M ein affiner Unterraum, so nennt man $\Delta M := \{x - y : x, y \in M\}$ den Differenzraum von M.

Lemma 16.1.
Sei M ein affiner Unterraum von V.
(a) Ist $p \in V$ und U Untervektorraum von V mit $M = p + U$, so $p \in M$ und $U = \Delta M$.
(b) ΔM ist Untervektorraum, und für jedes $p \in M$ gilt $M = p + \Delta M$.

Beweis :
(a) Es ist $p = p + 0 \in p + U$. Aus $u \in U$ folgt $p + u \in M$ und weiter (wegen $p \in M$) $u = (p + u) - p \in \Delta M$.
Aus $u \in \Delta M$ folgt $u = x - y$ mit $x, y \in M$, also $u = (p + u_1) - (p + u_2) = u_1 - u_2$ mit $u_1, u_2 \in U$.
(b) Sei $M = q + U$ und $p \in M$. Dann $p = q + u_0$ mit $u_0 \in U$, und es folgt
$p + U = \{q + u_0 + u : u \in U\} = q + U = M$. Nach (a) deshalb $\Delta M = U$.

Bemerkung. Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\text{Lös}(A; b) \neq \emptyset$ gilt:
$\text{Lös}(A; b)$ ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$, und $\text{Lös}(A; 0)$ ist der Differenzraum von $\text{Lös}(A; b)$.

Definition.
Für jeden affinen Unterraum M sei $\dim(M) := \dim(\Delta M)$.
Einen affinen Unterraum der Dimension $\dim V - 1$ nennt man eine *Hyperebene*.
Einen affinen Unterraum der Dimension 1 (bzw. 2) nennt man eine *Gerade* (bzw. *Ebene*).
Zwei affine Unterräume M und N von V heißen *parallel*, wenn $\Delta M \subseteq \Delta N$ oder $\Delta N \subseteq \Delta M$ gilt.
Man beachte, daß die "Parallelität" von affinen Unterräumen keine Äquivalenzrelation ist!

Lemma 16.2.
Seien $M_1 = p_1 + U_1$ und $M_2 = p_2 + U_2$ affine Unterräume von V.
(a) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \iff p_2 - p_1 \in U_1 + U_2$
(b) $q \in M_1 \cap M_2 \implies M_1 \cap M_2 = q + U_1 \cap U_2$
(c) Ist $V = U_1 \oplus U_2$, so enthält $M_1 \cap M_2$ genau einen Punkt q.
Diesen nennt man den *Schnittpunkt* von M_1 und M_2.
(d) Ist M_1 eine Hyperebene und M_2 eine Gerade, die nicht parallel zu M_1 ist, so gilt $V = U_1 \oplus U_2$.

Beweis :
(a) Ist $q \in M_1 \cap M_2$, so $q = p_1 + u_1 = p_2 + u_2$ mit $u_i \in U_i$, also $p_2 - p_1 = u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$.
Ist umgekehrt $p_2 - p_1 \in U_1 + U_2$, so $p_2 - p_1 = u_1 - u_2$ mit $u_i \in U_i$, also $p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \in M_1 \cap M_2$.
(b) Sei $q \in M_1 \cap M_2$. Nach 16.1 gilt dann $M_i = q + U_i$ und folglich
$x \in M_1 \cap M_2 \Leftrightarrow x - q \in U_1 \wedge x - q \in U_2 \Leftrightarrow x - q \in U_1 \cap U_2 \Leftrightarrow x \in q + U_1 \cap U_2$.
(c) $p_2 - p_1 \in U_1 + U_2 \Rightarrow M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Sei $q \in M_1 \cap M_2$. Dann $M_1 \cap M_2 = q + U_1 \cap U_2 = q + \{0\} = \{q\}$.
(d) Wäre $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$, so wäre (wegen $\dim(U_2) = 1$) $U_2 \subseteq U_1$, also M_1, M_2 parallel.
Folglich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und somit (wegen $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$) $V = U_1 \oplus U_2$.

Lemma 16.3. Für $U, H \subseteq V$ gilt:
(a) U ist UVR der Dimension $\dim(V) - 1 \iff \exists \varphi \in V^* \backslash \{0\} (U = \mathrm{Ker}(\varphi))$.
(b) H ist Hyperebene $\iff \exists \varphi \in V^* \backslash \{0\} \exists \alpha \in K (H = \overset{-1}{\varphi}(\alpha))$.

Beweis :
(a) "$\Rightarrow$": Wir wählen eine Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V, so daß $U = \mathrm{span}(v_1, ..., v_{n-1})$, und definieren $\varphi \in V^*$ durch $\varphi(v_1) := ... := \varphi(v_{n-1}) := 0$, $\varphi(v_n) := 1$. Dann gilt $\mathrm{Ker}(\varphi) = U$. "$\Leftarrow$": Dimensionsformel.
(b) "$\Rightarrow$": Sei $H = p + U$. Nach (a) existiert ein $\varphi \in V^*$ mit $U = \mathrm{Ker}(\varphi)$, also
$H = \{p + u : \varphi(u) = 0\} = \{v : \varphi(v - p) = 0\} = \{v : \varphi(v) = \varphi(p)\} = \overset{-1}{\varphi}(\varphi(p))$.
"$\Leftarrow$": Wegen $\varphi \neq 0$ existiert $p \in V$ mit $\varphi(v) = \alpha$. Dann $H = \overset{-1}{\varphi}(\alpha) = \{v : \varphi(v) = \varphi(p)\} =$
$= \{v : v - p \in \mathrm{Ker}(\varphi)\} = p + \mathrm{Ker}(\varphi)$ und $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim(V) - 1$.

Lemma 16.4.
Seien $v_0, v_1, ..., v_k \in V$. Dann ist
$\mathsf{Aff}(v_0, ..., v_k) := v_0 + \mathrm{span}(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0) = \{ \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i v_i : \alpha_0, ..., \alpha_k \in K \;\&\; \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \}$
der kleinste affine Unterraum von V, der $v_0, ..., v_k$ enthält.
Man nennt ihn den von $v_0, v_1, ..., v_k$ *aufgespannten affinen Unterraum* oder die *affine Hülle* von $v_0, v_1, ..., v_k$.

Beweis:
$$\begin{aligned} v_0 + \mathrm{span}(v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0) &= \{v_0 + \textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i (v_i - v_0) : \alpha_1, ..., \alpha_k \in K\} \\ &= \{(1 - \textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i) v_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i : \alpha_1, ..., \alpha_k \in K\} \\ &= \{\alpha_0 v_0 + \textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i : \alpha_0, ..., \alpha_k \in K \;\&\; \alpha_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i\} \\ &= \{\textstyle\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i : \alpha_0, ..., \alpha_k \in K \;\&\; \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1\}. \end{aligned}$$
Ist M ein affiner Unterraum mit $v_0, ..., v_k \in M$, so gilt $v_0 + \mathrm{span}(v_1 - v_0, ..., v_k - v_0) \subseteq v_0 + \Delta M = M$.

Beispiel.
Für $v_0 \neq v_1 \in V$ gilt: $\mathsf{Aff}(v_0, v_1) = v_0 + \mathbb{R}(v_1 - v_0) = \{v_0 + \alpha(v_1 - v_0) : \alpha \in K\} = \{\lambda v_0 + (1-\lambda) v_1 : \lambda \in K\}$ ist die Gerade durch v_0 und v_1. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist $\{\lambda v_0 + (1-\lambda) v_1 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ die Strecke zwischen v_0 und v_1.

Im folgenden sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdim. eukl. Vektorraum und U, W seien Untervektorräume von V.

Bemerkung. Nach Korollar 12.9b und Lemma 12.6b gilt: $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Definition.
Für $M, M' \subseteq V$ definiert man den *Abstand von M und M'* durch
$d(M, M') := \inf\{\|x - y\| : x \in M \;\&\; y \in M'\}$.
Für $q \in V$ sei $d(q, M) := d(M, q) := d(M, \{q\}) = \inf\{\|x - q\| : x \in M\}$.

Lemma 16.5.
Sei $M = p + U$ und sei $q \in V$.
Der Punkt $\ell := p + \mathsf{pr}_U(q - p)$ heißt dann der Fußpunkt des Lotes von q auf M. – Es gilt:
(a) $\ell \in M$ und $q - \ell = \mathsf{pr}_{U^\perp}(q - p)$
(b) $\forall x \in M \setminus \{\ell\} (q - x \notin U^\perp \;\&\; \|q - \ell\| < \|q - x\|)$
(c) $d(q, M) = \|q - \ell\| = (\|q - p\|^2 - \|\mathsf{pr}_U(q - p)\|^2)^{\frac{1}{2}}$

Beweis :

(a) Nach Definition von pr_U gilt $\mathsf{pr}_U(q-p) \in U$ und $q - \ell = (q-p) - \mathsf{pr}_U(q-p) = \mathsf{pr}_{U^\perp}(q-p)$.

(b) 1. Sei $x \in M$ mit $q - x \in U^\perp$. Dann gilt $q - p = (q-x) + (x-p)$ und $q - p = (q-\ell) + (\ell - p)$ mit $q - x, q - \ell \in U^\perp$ und $x - p, \ell - p \in U$, woraus $q - x = q - \ell$ und weiter $x = \ell$ folgt.

2. Sei $\ell \neq x \in M$. Dann $0 < \|\ell - x\|$ und $\ell - x \in U$, $q - \ell \in U^\perp$. Es folgt $\|q-\ell\|^2 < \|q-\ell\|^2 + \|\ell - x\|^2 = \|q-x\|^2$.

(c) $d(q, M) = \|q - \ell\|$ folgt aus $\ell \in M$ und (b). Die zweite Gleichung folgt aus (a) und 12.3a.

Lemma 16.6 (Abstand zweier affiner Unterräume)

(a) $d(p+U, q+W) = d(p-q, U+W) = \|\mathsf{pr}_{(U+W)^\perp}(p-q)\|$.

(b) Für $a \in p + U$ und $b \in q + W$ sind äquivalent:

(i) $d(p+U, q+W) = \|a - b\|$, (ii) $a - b \in (U+W)^\perp$, (iii) $a - b = \mathsf{pr}_{(U+W)^\perp}(p-q)$.

(c) $a, a' \in p + U$ & $b, b' \in q + W$ & $a - b, a' - b' \in (U+W)^\perp$ & $U \cap W = \{0\} \Rightarrow a = a'$ & $b = b'$.

Beweis :

(a) $\{x - y : x \in p + U \text{ \& } y \in q + W\} = \{(p-u) - (q+w) : u \in U \text{ \& } w \in W\} = \{(p-q) - v : v \in U + W\}$.

Folglich $d(p+U, q+W) = d(p-q, U+W) \overset{16.5}{=} \|\mathsf{pr}_{(U+W)^\perp}(p-q)\|$.

(b) Es gilt $\|\mathsf{pr}_{(U+W)^\perp}(p-q)\| \overset{(a)}{=} d(p+U, q+W) = d(a+U, b+W) \overset{(a)}{=} \|\mathsf{pr}_{(U+W)^\perp}(a-b)\|$.

Folglich $d(p-q, U+W) = \|a-b\| \Leftrightarrow \|\mathsf{pr}_{(U+W)^\perp}(a-b)\| = \|a-b\| \Leftrightarrow a - b \in (U+W)^\perp$.

Ferner gilt $(a-b) - (p-q) \in U + W$ und deshalb $\big(a - b = \mathsf{pr}_{(U+W)^\perp}(p-q) \Leftrightarrow a - b \in (U+W)^\perp\big)$.

(c) 16.6b $\Rightarrow a - b = a' - b' \Rightarrow a - a' = b - b' \in U \cap W$

Lemma 16.7.

Für $U, H \subseteq V$ gilt:

(a) U ist UVR der Dimension $\dim(V) - 1 \iff \exists c \in V\backslash\{0\}(U = \{c\}^\perp)$.

(b) H ist Hyperebene $\iff \exists c \in V\backslash\{0\}, \alpha \in \mathbb{R}(H = \{x \in V : \langle x, c\rangle - \alpha = 0\})$.

Beweis:

(a) $\dim(U) = \dim(V) - 1 \overset{16.3a}{\Leftrightarrow} \exists \varphi \in V^*\backslash\{0\}(U = \mathrm{Ker}(\varphi)) \overset{15.7b}{\Leftrightarrow} \exists c \in V\backslash\{0\}(U = \{v : \langle v, c\rangle = 0\})$

(b) H Hyperebene $\overset{16.3b,15.7b}{\iff} \exists c \in V\backslash\{0\}, \alpha \in \mathbb{R}\big(H = \{x : \langle x, c\rangle = \alpha\}\big)$.

Definition (Hessesche Normalform).

Ist $H = \{x \in V : \langle x, c\rangle - \alpha = 0\}$ mit $\|c\| = 1$,

so nennt man $\langle x, c\rangle - \alpha = 0$ die *Hessesche Normalform* von H.

Bemerkung.

Für $p, c \in V$ mit $\|c\| = 1$ ist $\langle x, c\rangle - \langle p, c\rangle = 0$ die Hessesche Normalform der durch den Punkt p gehenden und zu c senkrechten Hyperebene $H = p + \{c\}^\perp$.

Lemma 16.8 (Abstand eines Punktes zu einer Hyperebene)

Ist $H = \{x \in V : \langle x, c\rangle - \alpha = 0\}$ mit $\|c\| = 1$, so gilt für jedes $q \in V$: $d(q, H) = |\langle q, c\rangle - \alpha|$.

Beweis:

Es ist $H = p + U$ mit $p = \alpha c$ und $U = \{c\}^\perp$, $U^\perp = \mathbb{R}c$.

Nach 16.5 gilt nun $d(q, H) = \|q - \ell\| = \|\mathsf{pr}_{U^\perp}(q-p)\| = |\langle q - p, c\rangle| = |\langle q, c\rangle - \alpha|$.

Bemerkung. (Schnittpunkt von Gerade und Hyperebene)
Ist die Gerade $G = p + \mathbb{R}v$ nicht parallel zur Hyperebene $H = \{x : \langle x, c\rangle - \alpha = 0\}$,
so ist $s := p - \dfrac{\langle p, c\rangle - \alpha}{\langle v, c\rangle} \cdot v$ der Schnittpunkt von G und H.

Beweis: $\langle s, c\rangle - \alpha = \langle p, c\rangle - \frac{\langle p,c\rangle - \alpha}{\langle v,c\rangle} \langle c, v\rangle - \alpha = 0$

Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Schreibweise: $|A| := det(A)$.

Definition.
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei $x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ *(Vektorprodukt)*

Merkregel: $x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

Rechenregeln. Für $x, x', y, y', z \in \mathbb{R}^3$ gilt:
($\times$1) $(x + x') \times y = x \times y + x' \times y$,
($\times$2) $x \times (y + y') = x \times y + x \times y'$,
($\times$3) $\lambda x \times y = \lambda(x \times y) = x \times \lambda y$,
($\times$4) $y \times x = -x \times y$, also $x \times x = 0$,
($\times$5) $x \times y = 0 \Leftrightarrow x, y$ linear abhängig,
($\times$6) $\langle x \times y, z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$,
($\times$7) $\langle x \times y, x\rangle = \langle x \times y, y\rangle = 0$,
($\times$8) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$,
($\times$9) $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \sphericalangle(x, y)$.

Beweise:
($\times$5) "$\Leftarrow$": $x \times \lambda x = \lambda(x \times x) = 0$. "$\Rightarrow$": x, y linear unabhängig $\Rightarrow$ $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ $\dim \operatorname{span}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}) = 2 \Rightarrow$ o.E.d.A. $\dim \operatorname{span}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$.
($\times$6) $\langle x \times y, z\rangle = z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$,
($\times$7) folgt aus ($\times$6)
($\times$8) $\|x \times y\|^2 = x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_2y_3x_3y_2 - 2x_3y_1x_1y_3 - 2x_1y_2x_2y_1 =$
$= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 - 2x_1y_1x_2y_2 - 2x_1y_1x_3y_3 - 2x_2y_2x_3y_3 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$.
($\times$9) Sei $\vartheta := \sphericalangle(x, y)$. Nach Definition ist $\vartheta \in [0, \pi]$ und somit $\sin \vartheta \geq 0$.
$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \cos^2 \vartheta = \|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2 \vartheta) = \|x\|^2\|y\|^2 \cdot \sin^2 \vartheta$.

Lemma 16.9.
$u, w \in \mathbb{R}^3$ & $v = u \times w \neq 0$ & $c = \lambda u + \mu w \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{\langle c \times w, v\rangle}{\|v\|^2}$ und $\mu = \dfrac{\langle u \times c, v\rangle}{\|v\|^2}$.

Beweis:

$c \times w = \lambda(u \times w)$ & $u \times c = \mu(u \times w) \;\Rightarrow\; \langle c \times w, v\rangle = \lambda\|v\|^2$ & $\langle u \times c, v\rangle = \mu\|v\|^2$.

Lemma 16.10.
Seien $M = p + \mathbb{R}u$, $M' = q + \mathbb{R}w$ Geraden im $\mathbb{R}^3$. M, M' seien nicht parallel, d.h. $v := u \times w \neq 0$.
(a) $d(M, M') = \|\mathsf{pr}_{\mathbb{R}v}(p - q)\| = \dfrac{|\langle p - q, v\rangle|}{\|v\|}$.
(b) $\mathsf{pr}_{\mathbb{R}v}(p - q) = (p + \lambda u) - (q + \mu w)$ mit $\lambda = \dfrac{\langle w \times (p{-}q), v\rangle}{\|v\|^2}$ und $\mu = \dfrac{\langle u \times (p{-}q), v\rangle}{\|v\|^2}$.

Beweis:

(a) folgt wegen $\mathbb{R}v = (\mathbb{R}u + \mathbb{R}w)^\perp$ aus Lemma 16.6a.
(b) Sei $c := \mathsf{pr}_{\mathbb{R}u+\mathbb{R}w}(p - q)$. Nach 16.9 ist dann $c = (-\lambda')u + \mu' w$ mit $\lambda' = \dfrac{\langle w \times c, v\rangle}{\|v\|^2}$ und $\mu' = \dfrac{\langle u \times c, v\rangle}{\|v\|^2}$.
Andererseits $c = p - q + \alpha v$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, und folglich
$\langle w \times c, v\rangle = \langle w \times (p{-}q), v\rangle + \langle w \times (\alpha v), v\rangle = \langle w \times (p{-}q), v\rangle$ sowie $\langle u \times c, v\rangle = \langle u \times (p{-}q), v\rangle$.

Somit $\mathsf{pr}_{\mathbb{R}v}(p - q) = p - q - c = p - q + \lambda' u - \mu' w = (p + \lambda u) - (q + \mu w)$.

Definition (Spiegelung an einer Hyperebene).
Für $a \in V$ mit $\|a\| = 1$ sei $\mathsf{s}_a : V \to V$, $\mathsf{s}_a(x) := x - 2\langle x, a\rangle a$.

Offenbar ist s_a die Spiegelung an der zu a senkrechten Hyperebene $\{a\}^\perp$.

Lemma 16.11.
Für $a \in V$ mit $\|a\| = 1$ gilt:
(a) s_a ist lineare Abbildung mit $\mathsf{s}_a(a) = -a$ und $\mathsf{s}_a(x) = x$ für alle $x \in \{a\}^\perp$.
(b) Ist $\overline{v} = (v_1, ..., v_{n-1}, a)$ eine ONB von V, so gilt $\mathcal{M}_{\overline{v}}(\mathsf{s}_a) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(c) s_a selbstadjungiert und orthogonal.
(d) $\mathsf{s}_a \circ \mathsf{s}_a = \mathrm{id}$.
(e) $\det(\mathsf{s}_a) = -1$.

Beweis: (a), (b) klar. (c),(d),(e) folgen aus (b).

§17 Quotientenvektorräume

Sei V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V.

Definitionen.

Für $X, Y \subseteq V$ und $\lambda \in K$ sei $X + Y := \{x + y : x \in X \;\&\; y \in Y\}$ und $\lambda X := \lambda{\cdot}X := \{\lambda x : x \in X\}$.

Für $v, v' \in V$ definieren wir: $v \sim_U v' \;:\Leftrightarrow\; v' - v \in U$. Ferner sei $V/U := \{v + U : v \in V\}$.

Lemma 17.1

(a) Für $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt $(v + U) + (w + U) := (v + w) + U$ und $\lambda(v + U) = \lambda v + U$.

(b) $\sim_U$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

(c) Die Äquivalenzklasse $\{v' \in V : v' \sim_U v\}$ von $v \in V$ ist gleich dem affinen Unterraum $v + U$.

Beweis :

(a) $(v + U) + (w + U) = \{v + u_1 + w + u_2 : u_1, u_2 \in U\} = \{(v + w) + u : u \in U\} = (v + w) + U$.

(b) Reflexivität: $v - v = 0 \in U$. Symmetrie: $v' - v \in U \Leftrightarrow v - v' \in U$.

Transitivität: $v' - v \in U \;\&\; v'' - v' \in U \;\Rightarrow\; v'' - v = (v'' - v') + (v' - v) \in U$.

(c) $v' \sim_U v \Leftrightarrow v' - v \in U \Leftrightarrow v' \in v + U$.

Satz 17.2

(a) V/U mit der oben definierten Addition und skalaren Multiplikation ist ein K-Vektorraum. Das Nullelement dieses Vektorraums ist U.

(b) Die kanonische Abbildung $\rho_U : V \to V/U$, $v \mapsto v + U$ ist ein surjektiver Homomorphismus.

(c) $\mathrm{Ker}(\rho_U) = U$.

(d) $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$, falls $\dim(V) < \infty$.

(e) V/U hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem K-Vektorraum W und jedem Homomorphismus $f : V \to W$ mit $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ gibt es genau ein $\overline{f} \in \mathrm{Hom}(V/U, W)$ mit $f = \overline{f} \circ \rho_U$. Weiter ist $\mathrm{Ker}(\overline{f}) = \mathrm{Ker}(f)/U$

Man nennt V/U den *Quotientenvektorraum* von V nach U.

Beweis :

(a), (b) folgen sofort aus 17.1.

(c) $v \in \mathrm{Ker}(\rho) \Leftrightarrow \rho(v) = 0_{V/U} \Leftrightarrow v + U = U \Leftrightarrow v \in U$.

(d) $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(\rho)) + \dim(\mathrm{Im}(\rho)) = \dim(U) + \dim(V/U)$.

(e) Seien $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Dann gilt offenbar:

(*) $v, v' \in V \;\&\; v + U = v' + U \;\Rightarrow\; f(v) = f(v')$. $[v - v' \in U \subseteq \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(v) - f(v') = f(v - v') = 0]$

Wir können deshalb definieren: $\overline{f} : V/U \to W$, $\overline{f}(v + U) := f(v)$.

Aus der Definition folgt sofort $f = \overline{f} \circ \rho_U$; und wie man leicht nachrechnet, ist $\overline{f}$ auch linear.

[$\overline{f}(\rho(v) + \rho(v')) = \overline{f}(\rho(v + v')) = f(v + v') = f(v) + f(v') = \overline{f}(\rho(v)) + \overline{f'}(\rho(v'))$]

Ferner gilt: $v + U \in \mathrm{Ker}(\overline{f}) \Leftrightarrow \overline{f}(v + U) = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(f)$.

Eindeutigkeit: Sind $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V/U, W)$ mit $f = f_1 \circ \rho_U$ $(i = 1, 2)$, so gilt für alle $v \in V$:

$f_1(v + U) = f_1(\rho(v)) = f(v) = f_2(\rho(v)) = f_2(v + U)$.

Korollar (Homomorphiesatz).
Ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, so wird durch $\overline{f}(v+\mathrm{Ker}(f)) := f(v)$ ein Isomorphismus $\overline{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ definiert.

Beweis:
Nach 17.2 ist $\overline{f} \in \mathrm{Hom}(V/\mathrm{Ker}(f), W)$. Offenbar $\mathrm{Im}(\overline{f}) = \mathrm{Im}(f)$.
$\overline{f}$ injektiv: $\overline{f}(v+\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow v + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f) = 0_{V/\mathrm{Ker}(f)}$.

Lemma 17.3.
Sei $V = U \oplus W$ und $\rho : V \to V/U$ die kanonische Abbildung.
Dann ist $\rho' := \rho \restriction W : W \to V/U$ ein Isomorphismus.

Beweis:
1. ρ' surjektiv: Sei $v \in V$. Dann existieren $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$, also $\rho'(w) = w + U = v + U$.
2. ρ' injektiv: $w \in W$ & $\rho'(w) = U \Rightarrow w + U = U \Rightarrow w \in U \cap W = \{0\}$.

§18 Der Satz von Cayley-Hamilton.

Schreibweise: Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{m\times m}$ sei $A{\cdot}t^k := (a_{ij}t^k)_{i,j} \in K[t]^{m\times m}$.

Satz (Cayley-Hamilton).
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathsf{End}(V)$ und $P_f \in K[t]$ das charakteristische Polynom von f.
Dann gilt $P_f(f) = 0 \in \mathsf{End}(V)$.

(Zur Definition des Einsetzungshomomorphismus $K[t] \to \mathsf{End}(V)$, $p \mapsto p(f)$ siehe S.62.)

Beweis:
Sei A eine darstellende Matrix von f. Wir zeigen $P_A(A) = 0$.
Sei $B := A - t{\cdot}E \in K[t]^{n\times n}$, sowie $\widetilde{B} \in K[t]^{n\times n}$ die in §8 definierte komplementäre Matrix zu B.
Nach Lemma 8.13c gilt dann $\widetilde{B} \cdot B = \det(B) \cdot E$.
Ferner ist $P_A = \det(B) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ (für passende $a_0, ..., a_n \in K$).
Nach Definition von $\widetilde{B}$ (siehe §8) haben alle Komponenten von $\widetilde{B}$ einen Grad $< n$.
Folglich $\widetilde{B} = C_{n-1}{\cdot}t^{n-1} + \ldots + C_1{\cdot}t + C_0$ mit $C_i \in K^{n\times n}$, und somit
$\widetilde{B}B = (C_{n-1}{\cdot}t^{n-1} + \ldots + C_1{\cdot}t + C_0)(A - tE) =$
$(-C_{n-1}){\cdot}t^n + (C_{n-1}A - C_{n-2}){\cdot}t^{n-1} + \ldots + (C_1A - C_0){\cdot}t + C_0A$.
Andererseits $\widetilde{B}B = \det(B){\cdot}E = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k = (a_n{\cdot}E){\cdot}t^n + (a_{n-1}{\cdot}E){\cdot}t^{n-1} + \ldots + (a_1{\cdot}E{\cdot})t + a_0{\cdot}E$.
Komponentenweiser Koeffizientenvergleich (siehe Lemma 9.5b) ergibt:

$a_nE = -C_{n-1}$
$a_{n-1}{\cdot}E = C_{n-1}A - C_{n-2}$
....
$a_1{\cdot}E = C_1A - C_0$
$a_0{\cdot}E = C_0A$

Durch Multiplikation mit A^n bzw. A^{n-1} bzw.... und anschließender Addition erhalten wir

$$\underbrace{a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0E}_{P_A(A)} = -C_{n-1}A^n + (C_{n-1}A - C_{n-2})A^{n-1} + \ldots + (C_1A - C_0)A + C_0A = 0.$$