Mathematische Logik I

Wilfried Buchholz

Skriptum einer 4-std. Vorlesung im Wintersemester 1992/93

Mathematisches Institut der Universität München

1 Syntax und Semantik der Prädikatenlogik 1. Stufe

Logische Grundzeichen:
1. Abzählbar unendlich viele Variablen: $v_0, v_1, v_2, \ldots$
2. $\bot$ (Falsum), $\to$ (Implikationspfeil), $\forall$ (Allquantor), $=$ (Gleichheitszeichen).

Definition
Eine *Sprache* (1. Stufe) ist eine zur Menge der logischen Grundzeichen disjunkte Menge $\mathcal{L}$ von Symbolen, wobei jedes Element von $\mathcal{L}$ entweder ein n-stelliges *Funktionszeichen* ($n \geq 0$) oder ein n-stelliges *Relationszeichen* ($n \geq 1$) ist. Die 0-stelligen Funktionszeichen heißen *Konstanten.*

Eine *Struktur zur Sprache* $\mathcal{L}$ (kurz $\mathcal{L}$*-Struktur*) ist ein Paar $\mathcal{M} = (M, (u^{\mathcal{M}})_{u\in\mathcal{L}})$ bestehend aus einer nichtleeren Menge M (dem *Objektbereich* oder *Universum*) und einer Familie $(u^{\mathcal{M}})_{u\in\mathcal{L}}$ mit:
(i) $u^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$, falls u ein n-st. Relationszeichen.
(ii) $u^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$, falls u ein n-st. Funktionszeichen mit $n \geq 1$
(iii) $u^{\mathcal{M}} \in M$, falls u eine Konstante.

Für $\mathcal{M} = (M, (u^{\mathcal{M}})_{u\in\mathcal{L}})$ setzen wir $|\mathcal{M}| := M$.

`Vereinbarung:`
$\mathcal{L}$ bezeichne eine im folgenden festgehaltene Sprache 1. Stufe. Funktions- und Relationszeichen seien, soweit nichts anderes gesagt wird, stets Elemente von $\mathcal{L}$.

`Mitteilungszeichen:`
x, y, z für Variablen
R, R_i für Relationszeichen
f, f_i für Funktionszeichen
c, c_i für Konstanten
$\mathcal{M}$ für $\mathcal{L}$-Strukturen.

Induktive Definition der Terme
1. Jede Variable ist ein Term.
2. Ist f ein n-stelliges Funktionszeichen ($n \geq 0$), und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist auch $ft_1 \ldots t_n$ ein Term.

`Bemerkung`:
Die Regel 2. beinhaltet insbesondere folgende Festsetzung (für $n = 0$): "Jede Konstante ist ein Term".

Induktive Definition der Formeln
1. $\bot$ ist eine Formel.
2. Sind s, t Terme, so ist $=st$ eine Formel.
3. Ist R ein n-st. Relationszeichen, und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist $Rt_1...t_n$ eine Formel.
4. Sind A, B Formeln, so ist auch $\to AB$ eine Formel.
5. Ist A eine Formel und x eine Variable, so ist auch $\forall xA$ eine Formel.

Die nach 1.–3. gebildeten Formeln heißen *Primformeln.* Terme und Formeln werden unter dem Oberbegriff *"Ausdruck"* zusammengefaßt.

`Schreibweise`: Wir schreiben $s = t$ für $=st$, sowie $A \to B$ für $\to AB$.

Definitionen
– VAR := Menge der Variablen $v_0, v_1, \ldots$
– Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur. Eine $\mathcal{M}$*-Belegung* ist eine Abbildung $\xi : \text{VAR} \longrightarrow |\mathcal{M}|$.
– Ist ξ eine $\mathcal{M}$-Belegung, $a \in |\mathcal{M}|$, $x \in \text{VAR}$, so bezeichne ξ_x^a die folgendermaßen definierte $\mathcal{M}$-Belegung: $\xi_x^a(y) := \textsf{if}\, x = y \,\textsf{then}\, a \,\textsf{else}\, \xi(y)$.

`Mitteilungszeichen:`
ξ, η für ($\mathcal{M}$-)Belegungen.
E für Ausdrücke
s, t für Terme
A, B, C, D für Formeln
Γ, Σ für Formelmengen

Definition von $t^{\mathcal{M}}[\xi]$ (Wert von t)
1. $x^{\mathcal{M}}[\xi] := \xi(x)$
2. $c^{\mathcal{M}}[\xi] := c^{\mathcal{M}}$
3. $(ft_1 \dots t_n)^{\mathcal{M}}[\xi] := f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\xi] \dots t_n^{\mathcal{M}}[\xi])$

Definition von $A^{\mathcal{M}}[\xi]$ (Wahrheitswert von A)
1. $\perp^{\mathcal{M}}[\xi] := 0$
2. $(s = t)^{\mathcal{M}}[\xi] :=$ **if** $s^{\mathcal{M}}[\xi] = t^{\mathcal{M}}[\xi]$ **then** 1 **else** 0
3. $(Rt_1 \dots t_n)^{\mathcal{M}}[\xi] :=$ **if** $(t_1^{\mathcal{M}}[\xi], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[\xi]) \in R^{\mathcal{M}}$ **then** 1 **else** 0
4. $(A \to B)^{\mathcal{M}}[\xi] := \max\{1 - A^{\mathcal{M}}[\xi], B^{\mathcal{M}}[\xi]\}$
5. $(\forall x A)^{\mathcal{M}}[\xi] := \min\{A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] : a \in |\mathcal{M}|\}$

Definition
$\mathcal{M} \models A[\xi] \;:\Leftrightarrow A^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$ *(A gilt (ist wahr) in $\mathcal{M}, \xi$)*
$\mathcal{M} \models \Gamma[\xi] \;:\Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$, für alle $A \in \Gamma$ *($\mathcal{M}, \xi$ ist Modell von Γ)*
$\mathcal{M} \models A \;:\Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$, für alle ξ *(A gilt in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ ist Modell von A)*

Definition (Logische Folgerung)

$\Gamma \models A \;:\Leftrightarrow$ A ist eine *logische Folgerung* aus Γ
$:\Leftrightarrow$ Für alle $\mathcal{M}, \xi$ mit $\mathcal{M} \models \Gamma[\xi]$ gilt $\mathcal{M} \models A[\xi]$

$\models A \;:\Leftrightarrow$ A ist *allgemeingültig* $:\Leftrightarrow \emptyset \models A$ ($\Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$ für jede Interpretation $\mathcal{M}, \xi$)

Abkürzungen:
$\neg A := A \to \perp$, $A \vee B := \neg A \to B$, $A \wedge B := \neg(A \to \neg B)$, $\exists x A := \neg \forall x \neg A$.

Folgerungen
$\mathcal{M} \models \neg A[\xi] \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models A[\xi]$
$\mathcal{M} \models (A \to B)[\xi] \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models A[\xi]$ oder $\mathcal{M} \models B[\xi]$
$\mathcal{M} \models (A \wedge B)[\xi] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$ und $\mathcal{M} \models B[\xi]$
$\mathcal{M} \models (A \vee B)[\xi] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$ oder $\mathcal{M} \models B[\xi]$
$\mathcal{M} \models \forall x A\,[\xi] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi_x^a]$, für alle $a \in |\mathcal{M}|$
$\mathcal{M} \models \exists x A\,[\xi] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi_x^a]$, für ein $a \in |\mathcal{M}|$

Definition

$\mathrm{SYM} := \mathcal{L} \cup \mathrm{Var} \cup \{\perp, \to, \forall, =\}$

Für $u \in \mathrm{SYM}$ definieren wir die *Stellenzahl* $\#(u)$ wie folgt:
1. Für $u \in \mathcal{L}$ sei $\#(u)$ die in $\mathcal{L}$ festgelegte Stelligkeit von u.
2. $\#(\perp) := \#(v_i) := 0$, $\#(\to) := \#(=) := \#(\forall) := 2$

Wir verwenden p als Mitteilungszeichen für Elemente von $\mathrm{SYM}_0 := \mathcal{L} \cup \{\perp, \to, =\}$.

Lemma 1.1 (Unique readability)
Jeder Ausdruck E besitzt *genau* eine Darstellung $E = uE_1 ... E_n$ mit $u \in \mathrm{SYM}$, $n = \#(u)$ und Ausdrücken $E_1, \dots, E_n$.
Beweis:
Existenz: trivial.
Eindeutigkeit: Sei $E = uE_1...E_n$ und $E = \tilde{u}F_1...F_m$. Dann muß offenbar $u = \tilde{u}$ und somit $n = m$ sein. Sei $n \geq 1$ (sonst fertig). Dann ist $E_1...E_n = F_1...F_n$. Durch Induktion nach der Länge von $E_1...E_n$ zeigen wir nun $E_i = F_i$ für $i = 1, ..., n$: Es ist $E_1 = u_0\tilde{E}_1...\tilde{E}_k$, $F_1 = u_0\tilde{F}_1...\tilde{F}_k$ mit $\#(u_0) = k$. Offenbar ist nun $\tilde{E}_1...\tilde{E}_k E_2...E_n = \tilde{F}_1...\tilde{F}_k F_2...F_n$. Mit I.V. folgt daraus $\tilde{E}_j = \tilde{F}_j$ für $j = 1, ..., k$ und $E_i = F_i$ für $i = 2, ..., n$, und somit $E_i = F_i$ für $i = 1, ..., n$. $\triangle$

`Bemerkungen`

1. Durch Lemma 1.1 wird erst sichergestellt, daß die Werte $t^{\mathcal{M}}[\xi]$ und $A^{\mathcal{M}}[\xi]$ wohldefiniert sind.

2. Für jeden Ausdruck E liegt nach Lemma 1.1 genau einer der folgenden Fälle vor:
a) $E \in \mathrm{VAR}$
b) $E = pE_1...E_n$ mit $p \in \mathrm{SYM}_0$, $n = \#(p)$ und eindeutig bestimmten Ausdrücken $E_1, \dots, E_n$.
c) $E = \forall x A$.

Definition
$\perp^{\mathcal{M}} := 0$
$=^{\mathcal{M}}(i,j) :=$ **if** $i=j$ **then** 1 **else** 0 $(i,j \in \mathbb{N})$.
$\to^{\mathcal{M}}(i,j) := \max\{1-i, j\}$ $(i,j \in \mathbb{N})$.
$R^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n) :=$ **if** $(a_1,..,a_n) \in R^{\mathcal{M}}$ **then** 1 **else** 0, falls R ein n-st. Relationszeichen und $a_1,\ldots,a_n \in |\mathcal{M}|$.
Damit lassen sich jetzt die obigen Definitionen von $t^{\mathcal{M}}[\xi]$ und $A^{\mathcal{M}}[\xi]$ folgendermaßen zusammenfassen:
1. $x^{\mathcal{M}}[\xi] := \xi(x)$
2. $(pE_1...E_n)^{\mathcal{M}}[\xi] := p^{\mathcal{M}}(E_1^{\mathcal{M}}[\xi],\ldots,E_n^{\mathcal{M}}[\xi])$
3. $(\forall xA)^{\mathcal{M}}[\xi] := \min\{A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] : a \in |\mathcal{M}|\}$

Definition von $\mathrm{FV}(E)$, $\mathrm{BV}(E)$, $\mathrm{Var}(E)$
1. $\mathrm{FV}(x) := \{x\}$ und $\mathrm{BV}(x) := \emptyset$.
2. $\mathrm{FV}(pE_1...E_n) := \mathrm{FV}(E_1) \cup \ldots \cup \mathrm{FV}(E_n)$, $\mathrm{BV}(pE_1...E_n) := \mathrm{BV}(E_1) \cup \ldots \cup \mathrm{BV}(E_n)$.
3. $\mathrm{FV}(\forall xA) := \mathrm{FV}(A) \setminus \{x\}$, $\mathrm{BV}(\forall xA) := \mathrm{BV}(A) \cup \{x\}$.
4. $\mathrm{Var}(E) := \mathrm{FV}(E) \cup \mathrm{BV}(E)$

Lemma 1.2 (Koinzidenzlemma)
$E^{\mathcal{M}}[\xi] = E^{\mathcal{M}}[\eta]$, falls $\xi(x) = \eta(x)$ für alle $x \in \mathrm{FV}(E)$.
Beweis durch Induktion nach dem Aufbau von E:
1. $E = x$: Dann $x \in \mathrm{FV}(E)$ und $E^{\mathcal{M}}[\xi] = \xi(x) = \eta(x) = E^{\mathcal{M}}[\eta]$.
2. $E = pE_1...E_n$: Beh. folgt unmittelbar aus der I.V. (Induktionsvoraussetzung).
3. $E = \forall xA$: Für jedes $y \in \mathrm{FV}(A)$ gilt $y = x$ oder $x \neq y \in \mathrm{FV}(E)$ und somit $\xi_x^a(y) = a = \eta_x^a(y)$ oder $\xi_x^a(y) = \xi(y) = \eta(y) = \eta_x^a(y)$. Mit I.V. folgt daraus $A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] = A^{\mathcal{M}}[\eta_x^a]$ (für alle $a \in |\mathcal{M}|$), und somit $(\forall xA)^{\mathcal{M}}[\xi] = \min\{A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] : a \in |\mathcal{M}|\} = \min\{A^{\mathcal{M}}[\eta_x^a] : a \in |\mathcal{M}|\} = (\forall xA)^{\mathcal{M}}[\eta]$. $\triangle$

Definition
Ein Ausdruck E mit $\mathrm{FV}(E) = \emptyset$ heißt *geschlossen*.
Für geschlossenes E hängt der Wert $E^{\mathcal{M}}[\xi]$ nicht von ξ ab; man schreibt deshalb $E^{\mathcal{M}}$ für $E^{\mathcal{M}}[\xi]$.

Definition (Substitutionen)
Sei TER die Menge aller Terme.
Eine *Substitution* ist eine Funktion $\sigma : \mathrm{VAR} \longrightarrow \mathrm{TER}$ mit $\mathrm{dom}(\sigma) := \{x : \sigma(x) \neq x\}$ endlich.
Für jede Substitution σ sei $\mathrm{FV}(\sigma) := \bigcup\{\mathrm{FV}(\sigma(x)) : x \in \mathrm{dom}(\sigma)\}$.
Ist σ eine Substitution und sind $t_1,\ldots,t_n$ Terme und $x_1,\ldots,x_n$ paarweise verschiedene Variablen, so sei $\sigma_{x_1,\ldots,x_n}^{t_1,\ldots,t_n}$ die folgendermaßen definierte Substitution:

$$\sigma_{x_1,\ldots,x_n}^{t_1,\ldots,t_n}(y) := \begin{cases} t_i & \text{falls } y = x_i \ (1 \le i \le n) \\ \sigma(y) & \text{falls } y \notin \{x_1,\ldots,x_n\} \end{cases}$$

Definition von $E\sigma$
1. $x\sigma := \sigma(x)$, 2. $(pE_1...E_n)\sigma := p\,E_1\sigma \ldots E_n\sigma$, 3. $(\forall xA)\sigma := \forall x\, A\sigma_x^x$

Schreibweise:
$E_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n) := E\sigma$ mit $\sigma := \mathrm{id}_{x_1,\ldots,x_n}^{t_1,\ldots,t_n}$.
Folgerung: $\mathrm{FV}(E\sigma) \subseteq (\mathrm{FV}(E) \setminus \mathrm{dom}(\sigma)) \cup \mathrm{FV}(\sigma)$.
Beweis: (Wir behandeln nur den Fall $E = \forall xA$.)
$\mathrm{FV}((\forall xA)\sigma) = \mathrm{FV}(\forall x\, A\sigma_x^x) = \mathrm{FV}(A\sigma_x^x) \setminus \{x\} \overset{\text{I.V.}}{\subseteq} ((\mathrm{FV}(A) \setminus \mathrm{dom}(si_x^x)) \cup \mathrm{FV}(A\sigma_x^x)) \setminus \{x\} = ((\mathrm{FV}(A) \setminus \{x\})\mathrm{dom}(\sigma_x^x)) \cup (\mathrm{FV}(A\sigma_x^x)) \setminus \{x\}) \subseteq ((\mathrm{FV}(A)\{x\}) \setminus \mathrm{dom}(\sigma)) \cup \mathrm{FV}(\sigma)$.
Die letzte Inklusion gilt wegen $\mathrm{dom}(\sigma) \subseteq \mathrm{dom}(\sigma_x^x) \cup \{x\}$ & $\mathrm{FV}(\sigma_x^x) \subseteq \mathrm{FV}(\sigma)$.
Definition von $\mathrm{BV}_y(E)$
1. $\mathrm{BV}_y(E) := \emptyset$, falls E eine Variable.
2. $\mathrm{BV}_y(pE_1...E_n) := \mathrm{BV}_y(E_1) \cup \ldots \cup \mathrm{BV}_y(E_n)$.
3. $\mathrm{BV}_y(\forall xA) :=$ **if** $y \in \mathrm{FV}(\forall xA)$ **then** $\{x\} \cup \mathrm{BV}_y(A)$ **else** $\emptyset$

t heißt *substituierbar für y in A*, falls gilt $\mathrm{BV}_y(A) \cap \mathrm{FV}(t) = \emptyset$.

Lemma 1.3 (Substitutionslemma)
Ist E ein Ausdruck, und sind σ, η eine Substitutionen mit
(i) $\mathrm{BV}_y(E) \cap \mathrm{FV}(y\sigma) = \emptyset$ für alle $y \in \mathrm{dom}(\sigma)$,
(ii) $\eta(y) = (y\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi]$ für alle $y \in \mathrm{FV}(E)$,
so gilt $(E\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi] = E^{\mathcal{M}}[\eta]$.

Korollar
Ist $\mathrm{BV}_x(E) \cap \mathrm{FV}(t) = \emptyset$, so gilt $E_x(t)^{\mathcal{M}}[\xi] = E^{\mathcal{M}}[\xi^a_x]$ mit $a := t^{\mathcal{M}}[\xi]$.

Beweis durch Induktion nach dem Aufbau von E:
1. $E = x$: $(E\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi] = \eta(x) = E^{\mathcal{M}}[\eta]$.
2. $E = pE_1...E_n$: $(E\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi] = (p\,E_1\sigma \ldots E_n\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi] = p^{\mathcal{M}}((E_1\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi], \ldots, (E_n)\sigma^{\mathcal{M}}[\xi]) \overset{\text{I.V.}}{=}$
$= p^{\mathcal{M}}(E_1^{\mathcal{M}}[\eta], \ldots, E_n^{\mathcal{M}}[\eta]) = (p\,E_1...E_n)^{\mathcal{M}}[\eta]$.
3. $E = \forall x A$:
Es gilt $(E\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi] = (\forall x\, A\sigma^x_x)^{\mathcal{M}}[\xi] = \min\{(A\sigma^x_x)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x] : a \in |\mathcal{M}|\}$ und $E^{\mathcal{M}}[\eta] = \min\{A^{\mathcal{M}}[\eta^a_x] : a \in |\mathcal{M}|\}$.
Wir beweisen jetzt:
(i) $BV_y(A) \cap \mathrm{FV}(y\sigma^x_x) = \emptyset$, für alle $y \in \mathrm{dom}(\sigma^x_x)$,
(ii) $\eta^a_x(y) = (y\sigma^x_x)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x]$, für alle $y \in \mathrm{FV}(A)$, $a \in |\mathcal{M}|$.
Mit I.V. folgt dann $(A\sigma^x_x)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x] = A^{\mathcal{M}}[\eta^a_x]$, für alle $a \in |\mathcal{M}|$, und somit die Behauptung.
ad (i): Sei $y \in \mathrm{dom}(\sigma^x_x)$. Dann $y \neq x$ und $y \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Nach Voraussetzung folgt daraus $\mathrm{BV}_y(\forall x A) \cap \mathrm{FV}(y\sigma^x_x) = \emptyset$. Ist $y \in \mathrm{FV}(\forall x A)$, so $\mathrm{BV}_y(\forall x A) = \{x\} \cup \mathrm{BV}_y(A)$. Ist $y \notin \mathrm{FV}(\forall x A)$, so gilt (wegen $y \neq x$) auch $y \notin \mathrm{FV}(A)$ und folglich $\mathrm{BV}_y(A) = \emptyset$. In jedem Fall haben wir also $\mathrm{BV}_y(A) \subseteq \mathrm{BV}_y(\forall x A)$ und folglich $\mathrm{BV}_y(A) \cap \mathrm{FV}(y\sigma^x_x) = \emptyset$.
ad (ii): Offenbar gilt $\eta^a_x(x) = a = (x\sigma^x_x)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x]$. Sei nun $y \in \mathrm{FV}(A)\backslash\{x\} = \mathrm{FV}(\forall x A)$. Dann ist $x \in \mathrm{BV}_y(\forall x A)$. Ferner gilt $\eta^a_x(y) = \eta(y) = (y\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi]$ und $(y\sigma^x_x)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x] = (y\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x]$. Bleibt zu zeigen $(y\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi] = (y\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x]$. Für $y \notin \mathrm{dom}(\sigma)$ gilt das wegen $y \neq x$. Ist dagegen $y \in \mathrm{dom}(\sigma)$, so haben wir $\mathrm{BV}_y(\forall x A) \cap \mathrm{FV}(y\sigma) = \emptyset$ und folglich (wegen $x \in \mathrm{BV}_y(\forall x A)$) $x \notin \mathrm{FV}(y\sigma)$. Mit Lemma 1.2 folgt daraus $(y\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi] = (y\sigma)^{\mathcal{M}}[\xi^a_x]$. $\triangle$

Lemma 1.4
Sei T die Menge aller geschlossenen Terme und Σ eine Menge von geschlossenen Formeln derart, daß gilt:
(1) $\perp \notin \Sigma$.
(2) $A \to B \in \Sigma \;\Leftrightarrow\; A \notin \Sigma$ oder $B \in \Sigma$
(3) $\forall x A \in \Sigma \;\Leftrightarrow\; A_x(t) \in \Sigma$ für alle $t \in$T.
(4) $\sim := \{(s,t) : (s = t) \in \Sigma\}$ ist Äquivalenzrelation.
(5) $s \sim t$ & $A_x(s) \in \Sigma$ & A Primformel $\Rightarrow$ $A_x(t) \in \Sigma$.
Wir setzen hier voraus, daß $\mathcal{L}$ mindestens eine Konstante enthält und somit $\mathrm{T} \neq \emptyset$ ist.
Sei ferner:
$\bar{t} := \{s \in \mathrm{T} : s \sim t\}$ $(t \in \mathrm{T})$
$M := \{\bar{t} : t \in \mathrm{T}\}$
$\mathcal{M} := (M, (u^{\mathcal{M}})_{u \in \mathcal{L}})$, wobei $f^{\mathcal{M}}(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) := \overline{ft_1...t_n}$ und $R^{\mathcal{M}}(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) :=$ **if** $Rt_1...t_n \in \Sigma$ **then** 1 **else** 0.
Dann ist $\mathcal{M}$ eine wohldefinierte Struktur, und für alle geschlossenen Terme t bzw. Formeln A gilt:
a) $t^{\mathcal{M}} = \bar{t}$.
b) $\mathcal{M} \models A \;\Leftrightarrow\; A \in \Sigma$.

Beweis:
1. Wohldefiniertheit von $f^{\mathcal{M}}$:
Sei $\overline{s_i} = \overline{t_i}$, i.e. $s_i \sim t_i$, für $i = 1, ..., n$. Wir haben zu zeigen: $\overline{fs_1...s_n} = \overline{ft_1...t_n}$, i.e. $(fs_1...s_n = ft_1...t_n) \in \Sigma$. Nach Voraussetzung (4) gilt $(fs_1...s_n = fs_1...s_n) \in \Sigma$. Mit $s_1 \sim t_1$ und (5) folgt daraus $(fs_1...s_n = ft_1s_2...s_n) \in \Sigma$. Mit $s_2 \sim t_2$ und (5) folgt weiter $(fs_1...s_n = ft_1t_2s_3...s_n) \in \Sigma$ usw. Schließlich erhalten wir $(fs_1...s_n = ft_1...t_n) \in \Sigma$ und somit (wegen (4)) $\overline{fs_1...s_n} = \overline{ft_1...t_n}$.
2. Wohldefiniertheit von $R^{\mathcal{M}}$:
Sei $\overline{s_i} = \overline{t_i}$, i.e. $s_i \sim t_i$, für $i = 1, ..., n$. Wir haben zu zeigen: $(Rs_1...s_n) \in \Sigma \Leftrightarrow (Rt_1...t_n) \in \Sigma$. Aus Symmetriegründen reicht es, die Richtung "$\Rightarrow$" zu beweisen. Sei also $(Rs_1...s_n) \in \Sigma$. Analog wie oben folgt daraus der Reihe nach $(Rt_1s_2...s_n) \in \Sigma$, $(Rt_1t_2s_3...s_n) \in \Sigma, \ldots$, $(Rt_1...t_n) \in \Sigma$.

3. Beweis von a) und b) durch Induktion:
a) $(ft_1...t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}},\dots,t_n^{\mathcal{M}}) \overset{\text{I.V.}}{=} f^{\mathcal{M}}(\overline{t_1},\dots,\overline{t_n}) = \overline{ft_1...t_n}$.
b)
(i) $\mathcal{M} \not\models \bot$ & $\bot \notin \Sigma$.
(ii) $\mathcal{M} \models (s\!=\!t) \Leftrightarrow s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}} \overset{a)}{\Leftrightarrow} s \sim t \Leftrightarrow (s\!=\!t) \in \Sigma$.
(iii) $\mathcal{M} \models Rt_1...t_n \Leftrightarrow R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}...t_n^{\mathcal{M}}) = 1 \overset{a)}{\Leftrightarrow} R^{\mathcal{M}}(\overline{t_1}...\overline{t_n}) = 1 \Leftrightarrow Rt_1...t_n \in \Sigma$.
(iv) $\mathcal{M} \models (A \to B) \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models A$ oder $\mathcal{M} \models B \overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} A \notin \Sigma$ oder $B \in \Sigma \Leftrightarrow (A \to B) \in \Sigma$.
(v) Sei $\forall x A$ geschlossen, und ξ eine beliebige $\mathcal{M}$-Belegung. Dann gilt:
$\mathcal{M} \models \forall x A \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi_x^{\overline{t}}]$ für alle $t \in \mathrm{T} \overset{a)}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \models A[\xi_x^{t^{\mathcal{M}}}]$ für alle $t \in \mathrm{T} \overset{\text{L.1.3}}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models A_x(t)$ für alle $t \in \mathrm{T} \overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} A_x(t) \in \Sigma$ für alle $t \in \mathrm{T} \Leftrightarrow \forall x A \in \Sigma$. △

2 Der Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik 1. Stufe

DER HERLEITUNGSKALKÜL $\mathcal{K}_{\{\to,\forall\}}$

Logische Axiome

($\to$ 1) $A \to A$
($\to$ 2) $A \to (B \to A)$
($\to$ 3) $(C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))$
($\to$ 4) $\neg\neg A \to A$
($\forall$1) $\forall x A \to A_x(t)$, falls $\mathrm{BV}_x(A) \cap \mathrm{FV}(t) = \emptyset$
($\forall$2) $\forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$
($\forall$3) $A \to \forall x A$, falls $x \notin \mathrm{FV}(A)$
(G1) $t\!=\!t$
(G2) $s\!=\!t \to (A_x(s) \to A_x(t))$, falls A eine Primformel

Die Schlußregel "modus ponens"

(mp) $A\,,\, A \to B \vdash B$

Definition
$\mathrm{LogAx}_{\forall}$:= Menge aller Formeln der Form $\forall x_1 \dots \forall x_m A$ ($m \geq 0$), wobei A ein logisches Axiom ist.
Eine *Herleitung von A aus Γ* ist eine endliche Folge $(A_i)_{i \leq n}$ von Formeln für die gilt:
(i) $A_n = A$
(ii) Für jedes $k \leq n$ ist $A_k \in \mathrm{LogAx}_{\forall} \cup \Gamma$ oder es gibt $i, j < k$ mit $A_j = A_i \to A_k$
$\Gamma \vdash A$:$\Leftrightarrow$ A ist aus Γ *herleitbar* (oder *ableitbar*) :$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Herleitung von A aus Γ.
$\vdash A$:$\Leftrightarrow$ A ist *herleitbar* :$\Leftrightarrow$ $\emptyset \vdash A$.

Folgerungen
a) $\Gamma_0 \vdash A$ & $\Gamma_1 \vdash A \to B \Rightarrow \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash A$
b) $\Gamma_0 \vdash A$ & $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash A$
c) $\Gamma \vdash A \Rightarrow$ Es existiert endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash A$

Bemerkung
Sei Γ eine Formelmenge. Die Menge aller aus Γ ableitbaren Formeln ist offenbar die kleinste Obermenge von $\mathrm{LogAx}_{\forall} \cup \Gamma$, welche abgeschlossen unter "modus ponens" ist, d.h. mit A und $A \to B$ stets auch B enthält. Um zu beweisen, daß eine Menge X alle aus Γ ableitbaren Formeln enthält, reicht es also, zu zeigen, daß X eine unter "modus ponens" abgeschlossene Obermenge von $\mathrm{LogAx}_{\forall} \cup \Gamma$ ist.

Satz 2.1 (Konsistenz- oder Korrektheitssatz)
$\Gamma \vdash A \implies \Gamma \models A$

Beweis:
HS 1: Ist A ein logisches Axiom, so gilt $\mathcal{M} \models A[\xi]$ für alle $\mathcal{M}, \xi$.

Beweis:
Für die Axiome $(\to 1), \ldots, (\to 4), (G1)$ ist die Beh. trivial.

$(\forall 1)$ Sei $a := t^{\mathcal{M}}[\xi]$ und gelte $(\forall x A)^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$. Dann $A_x(t)^{\mathcal{M}}[\xi] \overset{\text{L.1.3}}{=} A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] = 1$.

$(\forall 2)$ Sei $(\forall x(A \to B))^{\mathcal{M}}[\xi] = (\forall x A)^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$. Dann $(A \to B)^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] = A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] = 1$ für alle $a \in |\mathcal{M}|$. Folglich $B^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] = 1$ für alle $a \in |\mathcal{M}|$, d.h. $(\forall x B)^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$.

$(\forall 3)$ Aus $A^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$ folgt mit $x \notin \mathrm{FV}(A)$ und Lemma 1.2 $A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] = 1$ für alle $a \in |\mathcal{M}|$, d.h. $(\forall x A)^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$.

(G2) Sei $a := s^{\mathcal{M}}[\xi]$ und $b := t^{\mathcal{M}}[\xi]$. Nach Lemma 1.3 gilt dann $A_x(s)^{\mathcal{M}}[\xi] = A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a]$ und $A_x(t)^{\mathcal{M}}[\xi] = A^{\mathcal{M}}[\xi_x^b]$. Sei nun $(s = t)^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$ und $A_x(s)^{\mathcal{M}}[\xi] = 1$. Dann folgt $a = s^{\mathcal{M}}[\xi] = t^{\mathcal{M}}[\xi] = b$ und weiter $1 = A_x(s)^{\mathcal{M}}[\xi] = A_x(t)^{\mathcal{M}}[\xi]$.

HS 2: Ist $A \in \mathrm{LogAx}_{\forall}$, so gilt $\mathcal{M} \models A[\xi]$ für alle $\mathcal{M}, \xi$.
Beweis durch Induktion nach der Länge von A: Sei $\mathcal{M}$ fest.
Fall 1: A logisches Axiom. Siehe HS 1.
Fall 2: $A = \forall x B$ mit $B \in \mathrm{LogAx}_{\forall}$. Nach I.V. haben wir $\mathcal{M} \models B^{\mathcal{M}}[\xi]$ für alle ξ. Daraus folgt $\mathcal{M} \models B^{\mathcal{M}}[\xi_x^a]$ für alle ξ und alle $a \in |\mathcal{M}|$, d.h. $\mathcal{M} \models A^{\mathcal{M}}[\xi]$ für alle ξ.

Die Behauptung des Satzes folgt nun aus HS 2 in trivialer Weise durch Induktion nach der Länge der Herleitung von A aus Γ. △

Satz 2.2 (Deduktionstheorem)
$\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$.
Beweis durch Herleitungsinduktion:
1. $B \in \mathrm{LogAx}_{\forall} \cup \Gamma$: Dann ist $(B\,,\, B \to (A \to B)\,,\, A \to B)$ eine Herleitung von $A \to B$ aus Γ.
2. $B = A$: Dann ist $A \to B$ ein logisches Axiom.
3. $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ und $\Gamma \cup \{A\} \vdash C \to B$:
Nach I.V. gilt dann $\Gamma \vdash A \to (C \to B)$ und $\Gamma \vdash A \to C$. Mit $(\to 3)$ und (mp) folgt daraus $\Gamma \vdash A \to B$. △

Korollar
$\Gamma_0 \vdash A \;\&\; \Gamma_1 \cup \{A\} \vdash B \;\Rightarrow\; \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash B$.

Lemma 2.3
a) $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \bot \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A$.
b) $\Gamma \vdash \bot \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A$.
c) $\Gamma \vdash A \wedge B \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash A \;\&\; \Gamma \vdash B$.
Beweis:
a) $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \bot \overset{2.2}{\Rightarrow} \Gamma \vdash \neg\neg A \overset{(\to 4)}{\Rightarrow} \Gamma \vdash A$.
b) $\Gamma \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \bot \overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \Gamma \vdash A$.
c) Übungsaufgabe. △

Lemma 2.4
a) $\Gamma \vdash A \;\&\; x \notin \mathrm{FV}(\Gamma) \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \forall x A$.
b) $\vdash \forall y A_x(y) \to \forall x A$, falls $y \notin \mathrm{Var}(A)$.
c) $\Gamma \vdash A_x(y) \;\&\; y \notin \mathrm{FV}(\Gamma) \cup \mathrm{Var}(A) \Rightarrow \Gamma \vdash \forall x A$.
Beweis:
a) Herleitungsinduktion:
1. $A \in \Gamma$: Dann $x \notin \mathrm{FV}(A)$ und $A \to \forall x A$ ist ein logisches Axiom.
2. $A \in \mathrm{LogAx}_{\forall}$: Dann auch $\forall x A \in \mathrm{LogAx}_{\forall}$.
3. $\Gamma \vdash C \;\&\; \Gamma \vdash C \to A$: I.V.$\Rightarrow \Gamma \vdash \forall x C \;\&\; \Gamma \vdash \forall x(C \to A) \overset{(\forall 2)}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash \forall x A$.

b) Wegen $y \notin \mathrm{Var}(A)$ gilt $A_x(y)_y(x) = A$ und $x \notin \mathrm{BV}_y(A_x(y))$ (Beweis: Übungsaufgabe). Somit ist $\forall y A_x(y) \to A$ ein Axiom $(\forall 1)$, und es gilt $\{\forall y A_x(y)\} \vdash A$. Mit a) und Satz 2.2 folgt daraus die Behauptung.
c) $\Gamma \vdash A_x(y) \overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \Gamma \vdash \forall y A_x(y) \overset{\text{b)}}{\Rightarrow} \Gamma \vdash \forall x A$. △

Lemma 2.5
Sind $c_0, ..., c_k$ paarw. verschiedene, nicht in $\Gamma \cup \{A\}$ vorkommende Konstanten mit $\Gamma \vdash A_{x_0,...,x_k}(c_0, ..., c_k)$, so gilt auch $\Gamma \vdash A$.
Beweis durch Induktion nach k:
Sei $B := A_{x_0}(c_0)$. Wie man leicht sieht, ist $A_{x_0,...,x_k}(c_0, ..., c_k) = B_{x_1,...,x_k}(c_1, ..., c_k)$, und die Konstanten $c_1, ..., c_k$ kommen nicht in B vor. Aus der Voraussetzung folgt also nach I.V. $\Gamma \vdash B$. Sei $(A_i)_{i \le n}$ eine Herleitung von B aus Γ, und sei y eine Variable, die nicht in dieser Herleitung und auch nicht in A vorkommt. A'_i entstehe aus A_i durch Einsetzen von y für c_0. Dann ist offenbar $(A'_i)_{i \le n}$ eine Herleitung von $A_{x_0}(y)$ aus Γ. Mit Lemma 2.4c folgt daraus $\Gamma \vdash \forall x_0 A$ und somit $\Gamma \vdash A$ (denn $\forall x_0 A \to A$ ist ein Axiom ($\forall 1$), da $A_{x_0}(x_0) = A$ und $x_0 \notin \mathrm{BV}_{x_0}(A)$). △

Definition

Γ heißt *erfüllbar* :⇔ Es gibt eine Interpretation $\mathcal{M}, \xi$ mit $\mathcal{M} \models \Gamma[\xi]$.

Γ heißt *konsistent* :⇔ $\Gamma \not\vdash \bot$.

Lemma 2.6
Sei T die Menge aller geschlossenen Terme, und Σ eine konsistente Menge geschlossener Formeln, so daß gilt:
(i) $A \notin \Sigma$ & A geschlossen $\Rightarrow \Sigma \cup \{A\} \vdash \bot$
(ii) $\neg\forall x A \in \Sigma \Rightarrow$ Es gibt ein $t \in \mathrm{T}$ mit $\neg A_x(t) \in \Sigma$

Dann gilt $\mathrm{T} \neq \emptyset$, $\Sigma = \{A : \mathrm{FV}(A) = \emptyset \ \& \ \Sigma \vdash A\}$, und Σ erfüllt die Bedingungen (1)–(5) aus Lemma 1.4.
Beweis:
1. $\Sigma \vdash A$ & $A \notin \Sigma \Rightarrow \Sigma \vdash A$ & $\Sigma \cup \{A\} \vdash \bot \Rightarrow \Sigma \vdash \bot$. *Widerspruch*
2.1. $A \to B \in \Sigma$ & $A \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \vdash B \Rightarrow B \in \Sigma$.
2.2. $B \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Sigma \vdash A \to B$.
2.3. $A \notin \Sigma \Rightarrow \Sigma \cup \{A\} \vdash \bot \Rightarrow \Sigma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Sigma \vdash A \to B$.
3.1. $\forall x A \in \Sigma \overset{(\forall 1)}{\Rightarrow} \Sigma \vdash A_x(t)$.
3.2. $A_x(t) \in \Sigma \ (\forall t \in \mathrm{T}) \Rightarrow \neg A_x(t) \notin \Sigma \ (\forall t \in \mathrm{T}) \Rightarrow \neg\forall x A \notin \Sigma \Rightarrow \Sigma \cup \{\neg\forall x A\} \vdash \bot \Rightarrow \Sigma \vdash \forall x A$.
4. $(s = t) \in \Sigma$ & $A_x(s) \in \Sigma$ & A Primformel $\overset{(G2)}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash A_x(t)$.
5. Aus 4. und (G1) folgt, daß $\sim := \{(s,t) : (s = t) \in \Sigma\}$ eine Äquivalenzrelation ist.
6. Aus $\mathrm{T} = \emptyset$ würde mit 3.2 folgen $\forall x \neg(x = x) \in \Sigma$. Wegen $\Sigma \vdash \neg\forall x \neg(x = x)$ wäre Σ dann inkonsistent. △

Definition
Eine Formelmenge Σ, welche die Voraussetzungen von Lemma 2.6 erfüllt, nennt man eine *vollständige Henkin-Theorie.* Das in Lemma 1.4 definierte Modell von Σ nennt man *das kanonische Modell von* Σ.

Satz 2.7 (Vollständigkeitssatz)
Jede konsistente Formelmenge Γ ist erfüllbar.

Korollar
a) Γ konsistent ⇔ Γ erfüllbar .
b) $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$.
c) $\Gamma \models A \Rightarrow$ Es existiert ein *endliches* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \models A$.
Beweis des Korollars:
a) "⇐": Gelte $\mathcal{M} \models \Gamma[\xi]$. Nach dem Konsistenzsatz haben wir dann ($\Gamma \vdash A \Rightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$), für jede Formel A. Folglich $\Gamma \not\vdash \bot$.
b) "⇐": $\Gamma \not\vdash A \overset{2.3a}{\Longrightarrow} \Gamma \cup \{\neg A\}$ konsistent $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ erfüllbar $\Rightarrow \Gamma \not\models A$.
c) Dies folgt aus b) und der Tatsache, daß in jeder Herleitung nur endlich viele Formeln vorkommen.

Beweis des Satzes:
Sei Γ konsistente Formelmenge.
Wir führen den Beweis zunächst unter folgenden Zusatzannahmen:
– $\mathcal{L}$ abzählbar
– $\mathcal{L}$ enthält unendlich viele Konstanten $e_0, e_1, e_2, \ldots$, die nicht in Γ vorkommen.

Sei $A_0, A_1, A_2, \ldots$ eine Abzählung aller geschlossenen $\mathcal{L}$-Formeln.
Sei $c_i := e_{2i}$ und $d_i := e_{2i+1}$. Für jede Formel A bezeichne A' diejenige Formel, die sich aus A durch Substitution von c_i für v_i (für alle $i \in \mathbb{N}$) ergibt. Ferner sei $\Gamma' := \{A' : A \in \Gamma\}$.

HS 1: $\Gamma' \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \bot$.
Beweis: Aus $\Gamma' \vdash \bot$ folgt $\{A_1', .., A_n'\} \vdash \bot$ für eine endliche Teilmenge $\{A_1, ..., A_n\} \subseteq \Gamma$. Sei $A := A_1 \wedge ... \wedge A_n$. Dann $\{A'\} \vdash A_i'$ für $i = 1, ..., n$ und somit $\{A'\} \vdash \bot$. Sei $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{v_0, ..., v_k\}$. Dann $A' = A_{v_0,\ldots,v_k}(c_0, ..., c_k)$.
$A' \vdash \bot \;\Rightarrow \vdash \neg A' \stackrel{2.5}{\Longrightarrow} \vdash \neg A \;\Rightarrow\; A \vdash \bot \;\Rightarrow\; \{A_1, ..., A_n\} \vdash \bot \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \bot.$ $\triangle$

Definition:
$\Sigma_0 := \Gamma'$

$$\Sigma_{n+1} := \begin{cases} \Sigma_n & \text{falls } \Sigma_n \cup \{A_n\} \vdash \bot \\ \Sigma_n \cup \{A_n\} & \text{falls } \Sigma_n \cup \{A_n\} \not\vdash \bot \;\;\&\;\; A \neq \neg\forall x B \\ \Sigma_n \cup \{A_n, \neg B_x(d_k)\} & \text{falls } \Sigma_n \cup \{A_n\} \not\vdash \bot \;\;\&\;\; A_n = \neg\forall x B \end{cases}$$
wobei $k := \min\{i : d_i$ kommt in keiner Formel $A \in \Sigma_n \cup \{B\}$ vor $\}$.

$\Sigma := \bigcup\{\Sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$.

HS 2: $\Sigma_n \vdash \bot \Rightarrow \Gamma' \vdash \bot$.
Beweis durch Induktion nach n:
1. $n = 0$: trivial.
2. $n \to n+1$: Gelte $\Sigma_{n+1} \vdash \bot$.
2.1. $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$. Dann $\Gamma' \vdash \bot$ nach I.V.
2.2. $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\neg\forall x B, \neg B_x(d_k)\}$ mit $\Sigma_n \cup \{\neg\forall x B\} \not\vdash \bot$ und d_k nicht in $\Sigma_n \cup \{B\}$.
$\Sigma_n \cup \{\neg\forall x B, \neg B_x(d_k)\} \vdash \bot \;\Rightarrow\; \Sigma_n \cup \{\neg\forall x B\} \vdash B_x(d_k) \stackrel{2.5+2.4a}{\Longrightarrow} \Sigma_n \cup \{\neg\forall x B\} \vdash \forall x B \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; \Sigma_n \cup \{\neg\forall x B\} \vdash \bot$. *Widerspruch*.
Aus $\Gamma \not\vdash \bot$ folgt mit HS 1,2: $\Sigma \not\vdash \bot$.

Wir zeigen nun, daß Σ eine vollständige Henkin-Theorie ist.
(i) Sei A geschlossen und $A \notin \Sigma$. Es ex. n mit $A = A_n$. Dann $A_n \notin \Sigma_{n+1}$ und somit $\Sigma_n \cup \{A_n\} \vdash \bot$.
(ii) Sei $\neg\forall x B = A_n \in \Sigma$. Wegen $\Sigma \not\vdash \bot$ gilt dann auch $\Sigma_n \cup \{A_n\} \not\vdash \bot$ und somit $\neg B_x(d_k) \in \Sigma$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Nach L.2.6 und L.1.4 existiert nun eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models \Sigma$, nämlich das kanonische Modell von Σ. Wegen $\Gamma' \subseteq \Sigma$ gilt dann auch $\mathcal{M} \models \Gamma'$, und mit dem Substitutionslemma folgt daraus $\mathcal{M} \models \Gamma[\xi]$ mit $\xi(v_i) := c_i^{\mathcal{M}}$.

Jetzt setzen wir nur noch voraus, daß $\mathcal{L}$ abzählbar ist.
Sei $c_0, c_1, c_2, \ldots$ eine abzählbar unendliche Folge neuer Konstanten, und $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$. Dann ist auch $\mathcal{L}'$ abzählbar.

Wir zeigen jetzt, daß Γ auch konsistent bzgl. $\mathcal{L}'$ ist. Angenommen, $(A_i)_{i \le n}$ ist eine $\mathcal{L}'$-Herleitung von $\bot$ aus Γ. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so daß alle in dieser Herleitung vorkommenden neuen Konstanten in $\{c_0, \ldots, c_k\}$ liegen. Wir wählen (paarweise verschiedene) Variablen $x_0, \ldots, x_k$, die nicht in dieser Herleitung vorkommen. Für jedes $i \le n$ sei $\tilde{A}_i$, diejenige Formel, die entsteht, wenn in A_i jede Konstante c_j durch die Variable x_j ersetzt wird. Wie man sich leicht überlegt ist dann $(\tilde{A}_i)_{i \le n}$ eine $\mathcal{L}$-Herleitung von $\bot$ aus Γ. Widerspruch.

Wie oben (mit $\mathcal{L}$ an Stelle von $\mathcal{L}'$) gezeigt, gibt es nun eine $\mathcal{L}'$-Interpretation $\mathcal{M}', \xi$, mit $\mathcal{M}' \models \Gamma[\xi]$. Sei $\mathcal{M}$ die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}'|\mathcal{L}$. Da Γ eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln ist, gilt dann auch $\mathcal{M} \models \Gamma[\xi]$. $\triangle$

Der Beweis für überabzählbares $\mathcal{L}$ wird später nachgeliefert.

Satz 2.8 (Kompaktheitssatz)
Ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, so ist auch Γ erfüllbar.
Beweis:
Γ nicht erfüllbar $\;\Rightarrow\; \Gamma \models \bot \;\Rightarrow\;$ es ex. endl. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \models \bot \;\Rightarrow\; \Gamma_0$ nicht erfüllbar . $\triangle$

3 Grundbegriffe der Modelltheorie

Definition
Für jede Formelmenge Γ bezeichne $\mathrm{L}(\Gamma)$ die Menge aller in Γ vorkommenden Funktions- und Relationszeichen.

Definition
Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{M}'$ eine $\mathcal{L}'$-Struktur:
$\mathcal{M}'$ ist eine *Expansion* von $\mathcal{M}$ $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ ist *Redukt* von $\mathcal{M}'$
$:\Leftrightarrow$ $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$ und $u^{\mathcal{M}'} = u^{\mathcal{M}}$ für alle $u \in \mathcal{L}$.

$\mathcal{M}'|\mathcal{L}$ bezeichne das eindeutig bestimmte $\mathcal{L}$-Redukt von $\mathcal{M}'$.

Bemerkung
Ist $\mathcal{M}'$ Expansion der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$, und ξ eine $\mathcal{M}$-Belegung, so gilt für jeden Ausdruck E der Sprache $\mathcal{L}$: $E^{\mathcal{M}}[\xi] = E^{\mathcal{M}'}[\xi]$. Die Beziehungen "$\Gamma \models A$" und "$\Gamma$ erfüllbar" sind deshalb unabhängig von der bei ihrer Definition zu Grund gelegten Sprache $\mathcal{L}$, solange $\mathrm{L}(\Gamma \cup \{A\}) \subseteq \mathcal{L}$. Dasselbe trifft wegen Satz 2.7 auch für "$\Gamma \vdash A$" und "Γ konsistent" zu.

Definition
Eine Menge geschlossener Formeln wird auch *"Axiomensystem"* genannt. Wir verwenden Σ als Mitteilungszeichen für Axiomensysteme. Ein *Modell von* Σ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathrm{L}(\Sigma) \subseteq \mathcal{L}$ und $\mathcal{M} \models \Sigma$. $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma) := \{\mathcal{M} : \mathcal{M}$ ist $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{M} \models \Sigma\}$.

Bemerkung
a) Σ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Σ besitzt ein Modell.
b) $\Sigma \models A \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \models A$ für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathrm{L}(\Sigma \cup \{A\}) \subseteq \mathcal{L}$ und $\mathcal{M} \models \Sigma$

Definition
Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt endlich (unendlich, abzählbar), wenn ihr Objektbereich $|\mathcal{M}|$ endlich (unendlich, abzählbar) ist.

Satz 3.1 (Löwenheim-Skolem)
Jedes abzählbare, erfüllbare Axiomensystem Σ besitzt ein abzählbares Modell.
Beweis:
Mit Σ sind auch $\mathcal{L} := \mathrm{L}(\Sigma)$ und $\mathrm{T} := \{t : t$ ist geschlossener $\mathcal{L}$-Term $\}$ abzählbar. Da die Menge Σ erfüllbar ist, ist sie auch konsistent. Wie im Beweis von Satz 2.7 gezeigt, besitzt Σ also ein abzählbares Modell. $\triangle$

Satz 3.2
Besitzt Σ beliebig große endliche Modelle, so auch ein unendliches Modell.
Beweis:
Sei $\mathcal{L} := \mathrm{L}(\Sigma)$ und $\Gamma = \Sigma \cup \{\neg(v_i = v_j) : i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j\}$.
HS: Jede endliche Teilmenge von Γ ist erfüllbar.
Beweis:
Sei $\Delta \subseteq \Gamma$ endlich. Dann existiert ein n mit $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\neg(v_i = v_j) : i < j \leq n\}$. Nach Voraussetzung existiert ein Modell $\mathcal{M}$ von Σ mit paarweise verschiedenen Elementen $a_0, ..., a_n \in |\mathcal{M}|$. Sei η die $\mathcal{M}$-Belegung mit $\eta(v_i) :=$ **if** $i \leq n$ **then** a_i **else** a_0. Dann gilt $\mathcal{M} \models \Delta[\eta]$.

Aus HS und Satz 2.8 folgt, daß Γ erfüllbar ist. Es existiert also eine Interpretation $\mathcal{M}, \xi$ mit $\mathcal{M} \models \Gamma[\xi]$. Dann ist $\mathcal{M}$ Modell von Σ, und $i \mapsto \xi(v_i)$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in $|\mathcal{M}|$, also $\mathcal{M}$ unendlich. $\triangle$

Definitionen
– Ist $\mathcal{L}$ eine Sprache, so bezeichne $\overline{\mathcal{L}}$ die Menge aller $\mathcal{L}$-Sätze.
– Eine Menge T von Sätzen heißt eine *Theorie*, falls $T = \{A \in \overline{\mathrm{L}(T)} : T \vdash A\}$.
– Ist T eine Theorie und $\Sigma \subseteq T$ mit $T = \{A \in \overline{\mathrm{L}(T)} : \Sigma \vdash A\}$, so heißt Σ ein *Axiomensystem von* T.
– Ein Axiomensystem Σ heißt *vollständig*, falls für jeden $\mathrm{L}(\Sigma)$-Satz A gilt: $\Sigma \vdash A$ oder $\Sigma \vdash \neg A$.
– Für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ sei $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{A \in \overline{\mathcal{L}} : \mathcal{M} \models A\}$ (*Theorie von* $\mathcal{M}$).
– Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ heißen *elementar äquivalent* (geschrieben $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$), falls $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}')$.
– Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ heißen *isomorph* (geschrieben $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$), wenn es einen Isomorphismus π von

$\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$ gibt, das ist eine bijektive Abbildung $\pi : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{M}'|$ mit
(a) $\pi(f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{M}'}(\pi(a_1), ..., \pi(a_n))$ $\quad (f \in \mathcal{L},\, n \geq 0,\, a_1, ..., a_n \in |\mathcal{M}|)$
(b) $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (\pi(a_1), ..., \pi(a_n)) \in R^{\mathcal{M}'}$ $\quad (R \in \mathcal{L},\, n \geq 1,\, a_1, ..., a_n \in |\mathcal{M}|)$

Lemma 3.3
a) $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist eine vollständige Theorie.
b) Ist $\mathrm{L}(\Sigma) \subseteq \mathcal{L}$, so ist $\{A \in \overline{\mathcal{L}} : \Sigma \vdash A\} = \bigcap\{\mathrm{Th}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma)\}$ eine Theorie.
c) $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}' \iff \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}')$
d) Ist $\mathcal{L}$ abzählbar, so existiert zu jeder $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ eine abzählbare Struktur $\mathcal{M}'$ mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$.

Beweis:
a) $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \vdash A \;\Rightarrow\; \mathcal{M} \models A \;\Rightarrow\; A \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ vollständig: klar.
b) $\Sigma \vdash A \;\Leftrightarrow\; \Sigma \models A \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \models A \; (\forall \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma)) \;\Leftrightarrow\; A \in T := \bigcap\{\mathrm{Th}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma)\}$.
$T \vdash A \;\Rightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \vdash A \; (\forall \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma)) \;\Rightarrow\; A \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \; (\forall \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma)) \;\Rightarrow\; A \in T$.
c) "$\Rightarrow$": $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}') \;\Rightarrow\; \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}')$.
"$\Leftarrow$": $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}') \;\Rightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{M}') \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \; (*)$.
$A \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \;\Rightarrow\; \neg A \notin \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \overset{(*)}{\Rightarrow} \neg A \notin \mathrm{Th}(\mathcal{M}') \;\Rightarrow\; A \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}')$.
d) $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ erfüllbar und abzählbar $\overset{3.1}{\Longrightarrow}$ Es gibt ein abzählbares $\mathcal{M}'$ mit $\mathcal{M}' \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. $\triangle$

Satz 3.4
Sei T eine Theorie und $\mathcal{L} = \mathrm{L}(T)$. Fogende Aussagen sind äquivalent:
(i) T ist vollständig.
(ii) Für jedes $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(T)$ gilt $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = T$.
(iii) Je zwei $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(T)$ sind elementar äquivalent.

Beweis:
(i)$\Rightarrow$(ii): $\mathcal{M} \models T \;\Rightarrow\; T \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. $A \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \;\Rightarrow\; \neg A \notin \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \;\Rightarrow\; \neg A \notin T \;\Rightarrow\; A \in T$.
(ii)$\Rightarrow$(iii): trivial.
(iii)$\Rightarrow$(i): Sei $A \in \overline{\mathcal{L}}$ und $A \notin T$. Dann $T \nvdash A$, d.h. es existiert ein Modell $\mathcal{M}_0$ von $T \cup \{\neg A\}$.
Aus (iii) folgt $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_0 \; (\forall \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(T))$ und somit $\mathcal{M} \models \neg A \; (\forall \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(T))$, d.h. $T \vdash \neg A$. $\triangle$

Satz 3.5
Ist π ein Isomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$, so gilt für jeden $\mathcal{L}$-Term t bzw. jede $\mathcal{L}$-Formel A:
a) $\pi(t^{\mathcal{M}}[\xi]) = t^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi]$, für jede $\mathcal{M}$-Belegung ξ,
b) $\mathcal{M} \models A[\xi] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}' \models A[\pi \circ \xi]$, für jede $\mathcal{M}$-Belegung ξ.
Korollar. $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}' \;\Rightarrow\; \mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$.

Beweis durch Induktion nach dem Aufbau von t bzw. A:
a) 1. $\pi(x^{\mathcal{M}}[\xi]) = \pi(\xi(x)) = x^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi]$.
2. $\pi((ft)^{\mathcal{M}}[\xi]) = \pi(f^{\mathcal{M}}(t^{\mathcal{M}}[\xi])) = f^{\mathcal{M}'}(\pi(t^{\mathcal{M}}[\xi])) \overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} f^{\mathcal{M}'}(t^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi]) = (ft)^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi]$.
b) 1. $\mathcal{M} \models (s = t)[\xi] \;\Leftrightarrow\; s^{\mathcal{M}}[\xi] = t^{\mathcal{M}}[\xi] \;\Leftrightarrow\; \pi(s^{\mathcal{M}}[\xi]) = \pi(t^{\mathcal{M}}[\xi]) \;\Leftrightarrow\; s^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi] = t^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi] \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \mathcal{M}' \models (s = t)[\pi \circ \xi]$.
2. $\mathcal{M} \models Rt \;\Leftrightarrow\; t^{\mathcal{M}}[\xi] \in R^{\mathcal{M}} \;\Leftrightarrow\; \pi(t^{\mathcal{M}}[\xi]) \in R^{\mathcal{M}'} \;\Leftrightarrow\; t^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi] \in R^{\mathcal{M}'} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}' \models (Rt)[\pi \circ \xi]$.
3. $(A \to B)^{\mathcal{M}}[\xi] = \max\{1 - A^{\mathcal{M}}[\xi], B^{\mathcal{M}}[\xi]\} = \max\{1 - A^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi], B^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi]\} = (A \to B)^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi]$.
4. $(\forall x A)^{\mathcal{M}}[\xi] = \min\{A^{\mathcal{M}}[\xi_x^a] : a \in |\mathcal{M}|\} = \min\{A^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi_x^a] : a \in |\mathcal{M}|\} =$
$= \min\{A^{\mathcal{M}'}[(\pi \circ \xi)_x^{\pi(a)}] : a \in |\mathcal{M}|\} = \min\{A^{\mathcal{M}'}[(\pi \circ \xi)_x^b] : b \in |\mathcal{M}'|\} = (\forall x A)^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \xi]$. $\triangle$

Schreibweise:
Sei $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ ($x_1, ..., x_n$ paarweise verschieden), und $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{M}|$:
$\mathcal{M} \models A_{x_1,...,x_n}[a_1, ..., a_n] \;:\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \models A[\xi_{x_1,...,x_n}^{a_1,...,a_n}]$, wobei ξ eine beliebige $\mathcal{M}$-Belegung.

Mit der soeben eingeführten Schreibweise läßt sich Satz 3.5 wie folgt formulieren:

Ist π ein Isomorphismus von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}'$, und sind $x_1, ..., x_n$ paarweise verschiedene Variablen, so gilt für alle $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{M}|$ und jeden $\mathcal{L}$-Term t mit $\mathrm{FV}(t) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ bzw. jede $\mathcal{L}$-Formel A mit $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$:
a) $\pi(t^{\mathcal{M}}[a_1, ..., a_n]) = t^{\mathcal{M}'}[\pi(a_1), ..., \pi(a_n)]$
b) $\mathcal{M} \models A[a_1, ..., a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}' \models A[\pi(a_1), ..., \pi(a_n)]$.

Satz 3.6
Zu jeder unendlichen Struktur $\mathcal{M}$ gibt es eine elementar äquivalente Struktur $\mathcal{M}_1$, die nicht isomorph zu $\mathcal{M}$ ist.
Beweis:
Sei $M := |\mathcal{M}|$ und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Jedem $\alpha \in \mathcal{P}(M)$ wird eine neue Konstante c_α zugeordnet. Sei $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{c_\alpha : \alpha \in \mathcal{P}(M)\}$ und $\Sigma' := \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \cup \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha, \beta \in \mathcal{P}(M) \;\&\; \alpha \neq \beta\}$.
Jede endliche Teilmenge von Σ' ist erfüllbar, nämlich durch eine geeignete Expansion von $\mathcal{M}$. Nach dem Kompaktheitssatz existiert ein Modell $\mathcal{M}_1'$ von Σ'. Sei $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1'|\mathcal{L}$.
$\mathcal{M}_1' \models \Sigma \;\Rightarrow\; \mathcal{M}_1' \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \;\Rightarrow\; \mathcal{M}_1 \models \mathrm{Th}(\mathcal{M}) \;\Rightarrow\; \mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1$.
$\mathcal{M}_1' \models \neg(c_\alpha = c_\beta) \;\Rightarrow\; c_\alpha^{\mathcal{M}_1'} \neq c_\beta^{\mathcal{M}_1'}$; also ist die Abbildung $F : \mathcal{P}(M) \to |\mathcal{M}_1|,\; \alpha \mapsto c_\alpha^{\mathcal{M}_1'}$ injektiv. Wäre $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_1$, so hätte man damit eine injektive Abbildung $\pi \circ F$ von $\mathcal{P}(M)$ in M. *Widerspruch.* $\triangle$

Bemerkung
Nach Satz 3.6 ist es bei keiner unendlichen Struktur möglich, diese durch ein Axiomensystem 1. Stufe bis auf Isomorphie eindeutig zu charakterisieren.
Dagegen gilt: Die Struktur $(\mathbb{N}, 0, S)$ ist durch die Peano-Axiome bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Die Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ ist bis auf Isomorphie der einzige vollständige angeordnete Körper.
Das Induktions- bzw. Vollständigkeitsaxiom sind aber Aussagen (bzw. Formeln) 2. Stufe:
$\forall X(0 \in X \wedge \forall x(x \in X \to Sx \in X) \to \forall x(x \in X)$
$\forall X(\emptyset \neq X$ beschränkt $\to \exists y(y = \sup(X)))$.
Eine Struktur, die elementar äquivalent, aber nicht isomorph zu $(\mathbb{N}, 0, S)$ bzw. $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ ist, heißt ein *Nonstandardmodell* der natürlichen bzw. reellen Zahlen. In einem Nonstandardmodell der natürlichen Zahlen gilt das Prinzip der vollständigen Induktion nicht für jede Menge $X \subseteq \mathbb{N}$. In einem Nonstandardmodell der reellen Zahlen besitzt nicht jede beschränkte Menge $X \neq \emptyset$ ein Supremum.

Lemma 3.7
Es gibt abzählbare Nonstandardmodelle der natürlichen Zahlen.
Beweis:
Sei $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, 0, S)$ und $\Gamma := \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \cup \{\neg(v_0 = 0), \neg(v_0 = S0), \neg(v_0 = SS0), \ldots\}$.
Offenbar ist jede endliche Teilmenge von Γ und damit auch Γ selbst erfüllbar; es existiert also $\mathcal{N}_1, \xi$ mit $\mathcal{N}_1 \models \Gamma[\xi]$ und $\mathcal{N}_1$ abzählbar. Wegen $\mathcal{N}_1 \models \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}_1$.
Annahme: π ist Isomorphismus von $\mathcal{N}$ auf $\mathcal{N}_1$.
Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\pi(n) = \pi((S...S0)^{\mathcal{N}}) = (S...S0)^{\mathcal{N}_1} = (S...S0)^{\mathcal{N}_1}[\xi] \neq v_0^{\mathcal{N}_1}[\xi] = \xi(v_0)$, d.h. π ist nicht surjektiv. *Widerspruch* $\triangle$

Lemma 3.8
Zu jedem archimedisch angeordneten Körper gibt es einen elementar äquivalenten angeordneten Körper, der nicht archimedisch ist.
Korollar
Gilt ein Satz A der Sprache $\{0, 1, +, \cdot, <\}$ in jedem nichtarchimedisch angeordneten Körper, so gilt A in *jedem* angeordneten Körper.
Beweis:
Sei $\mathcal{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper. $\Gamma := \mathrm{Th}(\mathcal{K}) \cup \{\underline{n} < v_0 : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $(\underline{n} := 1 + ... + 1)$.
Offenbar ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, und somit auch Γ selbst erfüllbar. Gelte $\mathcal{M} \models \Gamma[\xi]$. Dann $\mathcal{M} \equiv \mathcal{K}$, also $\mathcal{M}$ ist angeordneter Körper. Aus $\mathcal{M} \models (\underline{n} < v_0)[\xi]$ folgt $1^{\mathcal{M}} \cdot n <^{\mathcal{M}} \xi(v_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{M}$ ist nicht archimedisch.
Beweis des Korollars: Sei $\mathcal{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann existiert ein nichtarchimedisch angeordneter Körper $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{K} \equiv \mathcal{M}$. Aus $\mathcal{M} \models A$ folgt nun $\mathcal{K} \models A$. $\triangle$

Definition
Eine Klasse $\mathcal{S}$ von $\mathcal{L}$-Strukuren heißt *(endlich) axiomatisierbar*, wenn es ein (endliches) Axiomensystem Σ mit $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ gibt.
Folgerungen
a) $\mathcal{S}$ endlich axiomatisierbar $\iff$ Es gibt einen $\mathcal{L}$-Satz A mit $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\{A\})$.
b) Falls es Strukturen $\mathcal{M}, \mathcal{M}_0$ mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_0 \;\&\; \mathcal{M} \in \mathcal{S} \;\&\; \mathcal{M}_0 \notin \mathcal{S}$ gibt, so ist $\mathcal{S}$ nicht axiomatisierbar.

Lemma 3.9
Sei $\mathcal{S}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen und Σ ein Axiomensystem.
a) $\mathcal{S}$ ist endlich axiomatisierbar g.d.w. $\mathcal{S}$ und das Komplement von $\mathcal{S}$ axiomatisierbar sind.
b) Ist $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ endlich axiomatisierbar, so existiert ein endliches $\Delta \subseteq \Sigma$ mit $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Delta)$.
Beweis:
Abkürzung: $1 - \mathcal{S}$:=Komplement von $\mathcal{S}$.
a) "$\Rightarrow$": Für $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\{A\})$ gilt: $\mathcal{M} \in 1 - \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models A \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \neg A$.
"$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma_1)$ und $1-\mathcal{S} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma_2)$. Dann ist $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ nicht erfüllbar; es gibt also ein endliches $\Delta \subseteq \Sigma_1$, so daß $\Delta \cup \Sigma_2$ nicht erfüllbar ist. $\mathcal{M} \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{M} \models \Delta \Rightarrow \mathcal{M} \not\models \Sigma_2 \Rightarrow \mathcal{M} \notin 1-\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{S}$.
b) Sei $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\Sigma) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(\{A\})$. Dann $\Sigma \models A$, und folglich existiert ein endliches $\Delta \subseteq \Sigma$ mit $\Delta \models A$. Also: $\mathcal{M} \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{M} \models \Delta \Rightarrow \mathcal{M} \models A \Rightarrow \mathcal{M} \models \Sigma$. $\triangle$

Folgerungen
(1) Ist $\mathcal{S}$ eine Klasse von endlichen $\mathcal{L}$-Strukturen und enthält $\mathcal{S}$ beliebig "große" Strukturen, so ist $\mathcal{S}$ nicht axiomatisierbar.
(2) Die Klasse aller unendlichen $\mathcal{L}$-Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper,...) ist axiomatisierbar aber nicht endlich axiomatisierbar.
(3) Die Klasse aller Körper der Charakteristik 0 ist axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar.
(4) Gilt ein Satz A in allen Körpern der Charakteristik 0, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß A auch in allen Körpern mit Charakteristik $p \geq n_0$ gilt.
(5) Die Klasse aller (nicht)archimedisch angeordneten Körper ist nicht axiomatisierbar.

Vollständige Theorien

I. Die Theorie **DO** der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte

DO sei die deduktive Hülle des folgenden Axiomensystems:
(1) $\forall x \neg(x < x) \wedge \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z) \wedge \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$
(2) $\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y))$
(3) $\forall x \exists y (x < y) \wedge \forall x \exists y (y < x)$.

Lemma 3.10
Jedes abzählbare Modell von **DO** ist isomorph zur Struktur $(\mathbf{Q}, <)$ der rationalen Zahlen.
Beweis:
Sei $\mathcal{M} = (M, \prec)$ ein abzählbares Modell von **DO**, und sei $M = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbf{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definition von ordnungstreuen Funktionen $F_n \subseteq \mathbf{Q} \times \mathcal{M}$ durch Rekursion nach n:
1. $F_0 := \{(a_0, b_0)\}$.
2. Definition von F_{n+1}:
2.1. $n = 2m$. Ist $a_m \in \mathrm{dom}(F_n)$, so sei $F_{n+1} := F_n$.
Andernfalls sei $F_{n+1} := F_n \cup \{(a_m, b_k)\}$ mit $k := \min\{i : F_n \cup \{(a_m, b_i)\}$ ist ordnungstreu $\}$.
Da $\mathcal{M}$ ein Modell von **DO** ist, existiert ein solches b_k stets.
2.2. $n = 2m+1$. Ist $b_m \in \mathrm{ran}(F_n)$, so sei $F_{n+1} := F_n$.
Andernfalls sei $F_{n+1} := F_n \cup \{(a_k, b_m)\}$ mit $k := \min\{i : F_n \cup \{(a_i, b_m)\}$ ist ordnungstreu $\}$.

Offenbar ist $F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ein Isomorphismus von $(\mathbf{Q}, <)$ auf $\mathcal{M}$. $\triangle$

Satz 3.11
Die Theorie **DO** ist also vollständig, und es gilt **DO**$= \mathrm{Th}(\mathbf{Q}, <)$.
Beweis:
Nach Satz 3.4 reicht es zu zeigen, daß jedes Modell von **DO** elementar äquivalent zu $(\mathbf{Q}, <)$ ist. Sei also $\mathcal{M}$ ein Modell von **DO**. Nach Satz 3.1 und Lemma 3.3c) existiert eine abzählbare Struktur $\mathcal{M}_0$, die elementar äquivalent zu $\mathcal{M}$ ist. Nach obigem Lemma ist $\mathcal{M}_0$ isomorph zu $(\mathbf{Q}, <)$. Folglich $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_0 \equiv (\mathbf{Q}, <)$. $\triangle$

II. Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper
....

4 Rekursive Funktionen

Induktive Definition von Mengen PR^n n-stelliger Funktionszeichen
(PR 1) $\mathbf{0}^n \in \mathrm{PR}^n$ $(n \geq 0)$, $\mathsf{S} \in \mathrm{PR}^1$, $\mathsf{I}^n_i \in \mathrm{PR}^n$ $(1 \leq i \leq n)$.
(PR 2) $h \in \mathrm{PR}^m$ & $g_1, ..., g_m \in \mathrm{PR}^n$ & $m, n \geq 1 \Longrightarrow (\circ h g_1 ... g_m) \in \mathrm{PR}^n$.
(PR 3) $g \in \mathrm{PR}^n$ & $h \in \mathrm{PR}^{n+2} \Longrightarrow (\mathsf{R} gh) \in \mathrm{PR}^{n+1}$.
Abkürzung: $\mathrm{PR} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{PR}^n$, $\mathbf{0} := \mathbf{0}^0$.

Definition der *Standardstruktur* $\mathcal{N}$ zur Sprache PR
$|\mathcal{N}| := \mathbb{N}$
$\mathbf{0}^{\mathcal{N}} := 0,$, $(\mathbf{0}^n)^{\mathcal{N}}(\vec{a}) := 0$ $(n \geq 1)$
$\mathsf{S}^{\mathcal{N}}(a) := a + 1$
$(\mathsf{I}^n_i)^{\mathcal{N}}(a_1, ..., a_n) := a_i$
$(\circ h g_1 ... g_m)^{\mathcal{N}}(\vec{a}) := h^{\mathcal{N}}(g_1^{\mathcal{N}}(\vec{a}), \ldots, g_m^{\mathcal{N}}(\vec{a}))$
$(\mathsf{R} gh)^{\mathcal{N}}(\vec{a}, 0) := g^{\mathcal{N}}(\vec{a})$
$(\mathsf{R} gh)^{\mathcal{N}}(\vec{a}, b+1) := h^{\mathcal{N}}(\vec{a}, b, (\mathsf{R} gh)^{\mathcal{N}}(\vec{a}, b))$

Definition
Eine Funktion $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt *primitiv rekursiv*, wenn es ein $f \in \mathrm{PR}^n$ mit $F = f^{\mathcal{N}}$ gibt.
Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt *primitiv rekursiv*, wenn ihre charakteristische Funktion $\mathbf{1}_R : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$,
$\mathbf{1}_R(\vec{a}) := \mathsf{if}\, \vec{a} \in R\, \mathsf{then}\, 1\, \mathsf{else}\, 0$ primitiv rekursiv ist.

Definition eines n-stelligen Funktionszeichens $\lambda x_1 ... x_n.t \in \mathrm{PR}$ für jeden PR-term t und paarweise verschiedene Variablen $x_1, ..., x_n$ $(n \geq 1)$ mit $\mathrm{FV}(t) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$:
1. $\lambda x_1 ... x_n.\mathbf{0} := \mathbf{0}^n$
2. $\lambda x_1 ... x_n.x_i := \mathsf{I}^n_i$
3. $\lambda x_1 ... x_n.h t_1 ... t_m := (\circ h g_1 ... g_m)$ mit $g_i := \lambda x_1 ... x_n.t_i$

Lemma 4.1
$(\lambda x_1 ... x_n.t)^{\mathcal{N}}(a_1, ..., a_n) = t^{\mathcal{N}}_{x_1,...,x_n}[a_1, ..., a_n]$.
Beweis:
Abk.: $t^{\mathcal{N}}[\vec{a}] := t^{\mathcal{N}}_{x_1,...,x_n}[a_1, ..., a_n]$.
1. $(\lambda \vec{x}.\mathbf{0})^{\mathcal{N}}(\vec{a}) = (\mathbf{0}^n)^{\mathcal{N}}(\vec{a}) = 0 = \mathbf{0}^{\mathcal{N}}[\vec{a}]$.
2. $(\lambda \vec{x}.x_i)^{\mathcal{N}}(\vec{a}) = (\mathsf{I}^n_i)^{\mathcal{N}}(\vec{a}) = a_i = x_i^{\mathcal{N}}[\vec{a}]$
3. Sei $t = h t_1 ... t_m$ und $g_i := \lambda x_1 ... x_n.t_i$.
$(\lambda \vec{x}.t)^{\mathcal{N}}(\vec{a}) = (\circ h g_1 ... g_m)^{\mathcal{N}}(\vec{a}) = h^{\mathcal{N}}(g_1^{\mathcal{N}}(\vec{a}), ..., g_m^{\mathcal{N}}(\vec{a})) = h^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}[\vec{a}], ..., t_m^{\mathcal{N}}[\vec{a}]) = t^{\mathcal{N}}[\vec{a}]$. $\triangle$

Vereinbarung
Wir verwenden $a, b, c, i, j, k, l, m, n$ als Mitteilungszeichen für natürliche Zahlen.
Ist $f \in \mathrm{PR}^n$, so bezeichnen wir die Funktion $f^{\mathcal{N}} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ebenfalls kurz mit f.
Entsprechend bezeichnet PR^n zugleich die Menge aller n-stelligen primitiv rekursiven Funktionen, und PR ist die kleinste Funktionenmenge, welche die Grundfunktionen $\mathbf{0}^n$, S, I^n_i enthält und abgeschlossen unter den Operationen $\circ$ (*Komposition*) und R (*primitive Rekursion*) ist.

Definition einiger spezieller Funktionszeichen (bzw. primitiv rekursiver Funktionen):
$\tilde{+} := (\mathsf{R}\mathsf{I}^1_1(\lambda xyz.\mathsf{S}z))$, $\mathsf{pd} := (\mathsf{R}\mathbf{0}\lambda yz.y)$, $\dot{-} := (\mathsf{R}\mathsf{I}^1_1\lambda xyz.\mathsf{pd}z)$, $\tilde{\cdot} := (\mathsf{R}\mathbf{0}^1\lambda xyz.\tilde{+}zx)$.
Für $f \in \mathrm{PR}^{n+1}$ sei $(\sum f) := (\mathsf{R}\mathbf{0}^n\lambda x_1 ... x_n yz.(z + f x_1 ... x_n y))$.

Für die eben definierten Funktionen gilt:
$\tilde{+}(a, b) = a + b$, $\tilde{\cdot}(a, b) = a \cdot b$ (im folgenden schreiben wir deshalb $+, \cdot$ für $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$),
$\mathsf{pd}(a) = \mathsf{if}\, a = 0\, \mathsf{then}\, 0\, \mathsf{else}\, a - 1$, $\dot{-}(a, b) = \mathsf{if}\, a \geq b\, \mathsf{then}\, a - b\, \mathsf{else}\, 0$.
$(\sum f)(\vec{a}, b) = \sum\limits_{i<b} f(\vec{a}, i)$.

Bemerkung: Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist genau dann primitiv rekursiv, wenn es ein $f \in \mathrm{PR}^n$ mit $R = \{\vec{a} \in \mathbb{N}^n : f(\vec{a}) = 0\}$ gibt. (Zum Beweis: $1 \dot{-} b = \mathsf{if}\, b = 0\, \mathsf{then}\, 1\, \mathsf{else}\, 0$.)

Abkürzungen:
$s < t := (\mathsf{S}s \dot{-} t \,\mathbf{=}\, \mathbf{0})$

$\forall x < tA := \forall x(x < t \to A)$, $\exists x < tA := \exists x(x < t \land A)$ (falls $x \notin \mathrm{FV}(t)$)
$\forall x \leq tA := \forall x(x < \mathsf{S}t \to A)$, $\exists x \leq tA := \exists x(x < \mathsf{S}t \land A)$ (falls $x \notin \mathrm{FV}(t)$)
Offenbar gilt: $\mathcal{N} \models (s < t)[\xi] \Leftrightarrow s^{\mathcal{N}}[\xi] < t^{\mathcal{N}}[\xi]$.

Induktive Definition der Δ_0-Formeln (der Sprache PR)
1. Jede Primformel von PR ist eine Δ_0-Formel.
2. Sind A, B Δ_0-Formeln, so ist auch $A \to B$ eine Δ_0-Formel.
3. Ist A ein Δ_0-Formel, und t ein PR-Term mit $x \notin \mathrm{FV}(t)$, so ist auch $\forall x < tA$ eine Δ_0-Formel.

Folgerung
– Mit A, B sind auch $\neg A$, $A \land B$, $A \lor B$ Δ_0-Formeln.
– Ist A eine Δ_0-Formel, und t ein PR-Term mit $x \notin \mathrm{FV}(t)$, so ist auch $\exists x < tA$ eine Δ_0-Formel.

Lemma 4.2
Ist A eine Δ_0-Formel mit $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$,
so ist die Relation $\{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n : \mathcal{N} \models A_{x_1,...,x_n}[a_1, ..., a_n]\}$ primitiv rekursiv.
Beweis:
Durch Induktion nach dem Aufbau von A definieren wir einen PR-Term r_A mit $\mathrm{FV}(r_A) = \mathrm{FV}(A)$ und $(r_A)^{\mathcal{N}}[\xi] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{N} \models A[\xi]$ (für jede $\mathbb{N}$-Belegung ξ).
1. $A = \bot$: $r_A := \mathsf{S}\mathbf{0}$.
2. $A = (s \mathbin{=} t)$: $r_A := (s \dot{-} t) + (t \dot{-} s)$.
3. $A = B \to C$: $r_A := (1 \dot{-} r_B) \cdot r_C$.
4. $A = \forall y < tB$ mit $y \notin \mathrm{FV}(t)$: Sei $\mathrm{FV}(A) = \{x_1, ..., x_n\} = \{\vec{x}\}$. $f := \lambda \vec{x} y. r_B$ und $r_A := (\sum f)\vec{x}t$. $\triangle$

Korollar
Die Klasse aller primitiv rekursiven Relationen ist abgeschlossen unter $\cap$, $\cup$, $\setminus$, beschränkter Quantifikation, sowie Einsetzung von prim. rek. Funktionen.

Lemma 4.3
Sind $f_1, ..., f_{k+1} \in \mathrm{PR}^n$, und sind $R_1, ..., R_k \subseteq \mathbb{N}^n$ paarweise disjunkte primitiv rekursive Relationen, so ist auch die folgende Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv:

$$f(\vec{a}) := \begin{cases} f_1(\vec{a}) & \text{falls } \vec{a} \in R_1 \\ \dots & \dots \\ f_k(\vec{a}) & \text{falls } \vec{a} \in R_k \\ f_{k+1}(\vec{a}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis:
Sei $R_{k+1} := \mathbb{N}^n \setminus (R_1 \cup \ldots \cup R_k)$.
$f := \lambda \vec{x}.(f_1(\vec{x}) \cdot \mathbf{1}_{R_1}(\vec{x}) + \ldots + f_{k+1}(\vec{x}) \cdot \mathbf{1}_{R_{k+1}}(\vec{x}))$. $\triangle$

Definition (beschränkter μ-Operator)
Für $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sei $(\overline{\mu} g) : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, $(\overline{\mu} g)(\vec{a}, b) := \begin{cases} \min\{i : g(\vec{a}, i) = 0\} & \text{falls } \exists i < b(g(\vec{a}, i) = 0) \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$

Lemma 4.4
Sei $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Dann gilt:
a) $(\overline{\mu} g)$ ist primitiv rekursiv.
b) Existiert ein $h \in \mathrm{PR}^n$ mit $\forall \vec{a} \in \mathbb{N}^n \exists i < h(\vec{a})\, g(\vec{a}, i) = 0$, so ist die Funktion $\vec{a} \mapsto \min\{i : g(\vec{a}, i) = 0\}$ primitiv rekursiv.
Beweis:
a) Nach 4.2 und 4.3 ist die folgende Funktion $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv:
$p(\vec{a}, c) := \begin{cases} c, & \text{falls } g(\vec{a}, c) = 0 \ \& \ \forall i < c(g(\vec{a}, i) \neq 0) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
Ferner gilt: $(\overline{\mu} g)(\vec{a}, b) = \begin{cases} (\sum p)(\vec{a}, b) & \text{falls } \exists i < b(g(\vec{a}, i) = 0) \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$
b) $\min\{i : g(\vec{a}, i) = 0\} = (\overline{\mu} g)(\vec{a}, h(\vec{a}))$. $\triangle$

Definition (Die primitiv rekursive "Paarfunktion" $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$)
$\pi(a, b) := b + \sum_{i<(a+b)}(i + 1) = b + (\sum \mathsf{S})(a + b)$

Lemma 4.5
a) $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.
b) $a, b \le \pi(a,b)$ und $(0 < a \Rightarrow b < \pi(a,b))$.
Beweis:
a)

$$\begin{array}{lllll} 0 = \hat{\pi}(0,0) & 2 = \hat{\pi}(0,1) & 5 = \hat{\pi}(0,2) & 9 = \hat{\pi}(0,3) & \dots \\ 1 = \hat{\pi}(1,0) & 4 = \hat{\pi}(1,1) & 8 = \hat{\pi}(1,2) & \dots & \dots \\ 3 = \hat{\pi}(2,0) & 7 = \hat{\pi}(2,1) & \dots & \dots & \dots \\ 6 = \hat{\pi}(3,0) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Durch das obige Schema wird offenbar eine Bijektion $\hat{\pi}$ von $\mathbb{N}^2$ auf $\mathbb{N}$ definiert; und es gilt:
$\hat{\pi}(a,b) = \hat{\pi}(a+b,0) + b$, sowie $\hat{\pi}(a+b,0) =$ Anzahl der in allen vorangehenden Diagonalen stehenden Gleichungen $= 1 + 2 + \ldots + (a+b)$. Folglich $\pi = \hat{\pi}$.
b) ist klar. △

Definition (Die Umkehrfunktionen π_1, π_2 zu π)
$\pi_1(a) := \min\{i : \exists j \le a[a = \pi(i,j)]\}$, $\pi_2(a) := \min\{j : a = \pi(\pi_1(a), j)\}$.

Lemma 4.6
a) Die Funktionen π_1, π_2 sind primitiv rekursiv.
b) $\pi(\pi_1(a), \pi_2(a)) = a$
c) $\pi_i(\pi(a_1, a_2)) = a_i \quad (i = 1, 2)$
Beweis:
a) Nach Lemma 4.5 gilt $\exists i \le a \exists j \le a(a = \pi(i,j))$ und $\exists j \le a(a = \pi(\pi_1(a), j))$.
Mit Lemma 4.4 folgt daraus die Behauptung.
b) und c) folgen aus Lemma 4.5a und der Definition von π_1, π_2. △

Definition (Kodierung endlicher Zahlenfolgen)
$a * \langle b \rangle := \pi(a,b) + 1$,
$\mathrm{tl}(a) := \pi_1(a \dot{-} 1)$,
$\mathrm{hd}(a) := \pi_2(a \dot{-} 1)$,
$\tau(a, 0) := a$, $\tau(a, k+1) := \mathrm{tl}(\tau(a,k))$ (offenbar gilt $\tau(a,k) \neq 0 \Rightarrow \tau(a,k+1) < \tau(a,k)$),
$\mathrm{lh}(a) := \min\{k : \tau(a,k) = 0\} = (\overline{\mu}\tau)(a, a+1)$,
$(a)_i :=$ **if** $i < \mathrm{lh}(a)$ **then** $\mathrm{hd}(\tau(a, \mathrm{lh}(a) \dot{-} (i+1)))$ **else** 0.

Die Funktionen $(a,b) \mapsto a * \langle b \rangle$, tl, hd, τ, lh, $(a,i) \mapsto (a)_i$ sind offenbar primitiv rekursiv.

Lemma 4.7
a) $\mathrm{lh}(a * \langle b \rangle) = \mathrm{lh}(a) + 1$
b) $(a * \langle b \rangle)_{\mathrm{lh}(a)} = b \;\&\; \forall i < \mathrm{lh}(a)((a * \langle b \rangle)_i = (a)_i)$
c) $i < \mathrm{lh}(a) \Rightarrow (a)_i < a$
Beweis:
Sei $n := \mathrm{lh}(a)$ und $c := a * \langle b \rangle$. Dann $a = \mathrm{tl}(c) = \tau(c, 1)$ und $b = \mathrm{hd}(c)$.
Durch Induktion nach i folgt ferner $\tau(c, i+1) = \tau(a, i)$, für alle $i \in \mathbb{N}$.
a) Es gilt $\tau(c, n+1) = \tau(a,n) = 0 \;\&\; \forall i < n(\tau(c, i+1) = \tau(a,i) \neq 0) \;\&\; \tau(c, 0) = c \neq 0$, also $\mathrm{lh}(c) = n+1$.
b) $(c)_n = \mathrm{hd}(\tau(c,0)) = b$ und, für $i < n$, $(c)_i = \mathrm{hd}(\tau(c, (n+1) \dot{-} (i+1))) = \mathrm{hd}(\tau(a, n \dot{-} (i+1))) = (a)_i$.
c) $i < \mathrm{lh}(a) \Rightarrow (a)_i = \pi_2(\tau(a, \mathrm{lh}(a) \dot{-} (i+1)) \dot{-} 1) \le a \dot{-} 1 < a$. △

Lemma 4.8
$\mathrm{lh}(c) = \mathrm{lh}(c') \;\&\; \forall i < \mathrm{lh}(c)((c)_i = (c')_i) \implies c = c'$.
Beweis:
Fall 1: $\mathrm{lh}(c) = 0$. Dann ist $c = 0 = c'$.
Fall 2: $\mathrm{lh}(c) = k+1$. Dann $c, c' > 0$ und es gibt a, b, a', b' mit $c = a * \langle b \rangle$, $c' = a' * \langle b' \rangle$. Nach Lemma 4.7 und Voraussetzung gilt nun $\mathrm{lh}(a) = k = \mathrm{lh}(a') \;\&\; b = (c)_k = (c')_k = b' \;\&\; \forall i < k((x)_i = (c)_i = (c')_i = (a')_i)$.
Mit I.V. folgt $a = a'$, und somit $c = c'$. △

Definition von $\langle a_0,...,a_n\rangle$
$\langle\rangle := 0,\ \ \langle a_0,...,a_n\rangle := \langle a_0,...,a_{n-1}\rangle * \langle a_n\rangle$
Offenbar ist für jedes feste $n \geq 1$ die Funktion $(a_0,...,a_{n-1}) \mapsto \langle a_0,...,a_{n-1}\rangle$ primitiv rekursiv.

Lemma 4.9
a) $\mathrm{lh}(\langle a_0,...,a_{n-1}\rangle) = n$
b) $i < n \Rightarrow (\langle a_0,...,a_{n-1}\rangle)_i = a_i$
c) $a = \langle (a)_0,...,(a)_{n-1}\rangle$ mit $n := \mathrm{lh}(a)$.
Beweis: Lemmata 4.7, 4.8. △

Definition
Für $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ sei $\overline{f} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, $\overline{f}(\vec{a},b) := \langle f(\vec{a},0),\ldots,f(\vec{a},b-1)\rangle$.

Folgerung
$f \in \mathrm{PR}^{n+1} \Rightarrow \overline{f} \in \mathrm{PR}^{n+1}$.
Beweis: $\overline{f}(\vec{a},0) = 0,\ \overline{f}(\vec{a},b+1) = \overline{f}(\vec{a},b) * \langle f(\vec{a},b)\rangle$. △

Lemma 4.10
Für jedes $h \in \mathrm{PR}^{n+2}$ ist auch die durch $f(\vec{a},b) := h(\vec{a},b,\overline{f}(\vec{a},b))$
rekursiv definierte Funktion f primitiv rekursiv.
Beweis:
$\overline{f}(\vec{a},0) = 0,\ \overline{f}(\vec{a},b+1) = \overline{f}(\vec{a},b) * \langle h(\vec{a},b,\overline{f}(\vec{a},b,\overline{f}(\vec{a},b))\rangle,\ \ f(\vec{a},b) = \left(\overline{f}(\vec{a},b+1)\right)_b$. △

Lemma 4.11
Sei $R \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$ primitiv rekursiv, und sei $Q \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, so daß gilt:
$\forall(\vec{a},b) \in \mathbb{N}^{n+1}[\,(\vec{a},b) \in Q \Leftrightarrow (\vec{a},b,\overline{\mathbf{1}_Q}(\vec{a},b)) \in R\,]$.
Dann ist Q ebenfalls primitiv rekursiv.
Beweis:
Offenbar gilt: $\mathbf{1}_Q(\vec{a},b) = \mathbf{1}_R(\vec{a},b,\overline{\mathbf{1}_Q}(\vec{a},b)$. △

Bemerkung (Ergänzung zu Lemma 4.11)
Sei $Q \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Dann gilt: $\forall i < \mathrm{lh}(b)[\,(\vec{a},(b)_i) \in Q \Leftrightarrow \left(\overline{\mathbf{1}_Q}(\vec{a},b)\right)_{(b)_i} = 1\,]$.

Rekursiv aufzählbare Relationen

Definition
Eine Relation $Q \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt *rekursiv aufzählbar*, wenn es eine primitiv rekursive Relation $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ gibt, so daß $Q = \{\vec{a} \in \mathbb{N}^n : \exists b\,(\vec{a},b) \in R\}$.

Bemerkung: Q primitiv rekursiv $\Longrightarrow$ Q rekursiv aufzählbar.

Lemma 4.12
Eine nichtleere Menge $Q \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann rekursiv aufzählbar,
wenn es ein $f \in \mathrm{PR}^1$ gibt, so daß $Q = f(\mathbb{N})$.
Beweis:
"$\Leftarrow$": Ist $f \in \mathrm{PR}^1$, so ist $R := \{(a,i) \in \mathbb{N}^2 : f(i) = a\}$ prim. rek., und $f(\mathbb{N}) = \{a \in \mathbb{N} : \exists i\,(a,i) \in R\}$.
"$\Rightarrow$": Sei $a_0 \in Q = \{a \in \mathbb{N} : \exists b\,(a,b) \in R\}$, wobei R primitiv rekursiv.
Definition: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(c) :=$ **if** $(\pi_1(c),\pi_2(c)) \in R$ **then** $\pi_1(c)$ **else** a_0.
Dann $f \in \mathrm{PR}^1$ und $f(\mathbb{N}) \subseteq Q$. Bleibt zu zeigen $Q \subseteq f(\mathbb{N})$:
$a \in Q \Rightarrow (a,b) \in R$ für ein $b \in \mathbb{N} \Rightarrow (\pi_1(c),\pi_2(c)) \in R$ mit $c := \pi(a,b) \Rightarrow a = \pi_1(c) = f(c)$. △

Induktive Definition der Σ_1-Formeln
1. Jede Δ_0-Formel ist eine Σ_1-Formel.
2. Sind A, B Σ_1-Formeln, so auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $\exists x A$.
3. Ist A eine Σ_1-Formel, und t ein PR-Term mit $x \notin \mathrm{FV}(t)$, so ist auch $\forall x < t A$ eine Σ_1-Formel.

Lemma 4.13
Eine Relation $Q \subseteq \mathbb{N}^n$ ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie sich durch eine Σ_1-Formel definieren läßt, d.h. wenn eine Σ_1-Formel A mit $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$ und $Q = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n : \mathcal{N} \models A[a_1, ..., a_n]\}$ existiert.
Beweis:
Eine Σ_1-Formel heiße *strikt*, wenn sie von der Form $\exists z C$ mit $C \in \Delta_0$ ist. Aus Lemma 4.2 folgt, daß eine Relation genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn sie sich durch eine strikte Σ_1-Formel definieren läßt. Durch Induktion nach dem Aufbau von A definieren wir nun zu jeder Σ_1-Formel A eine strikte Σ_1-Formel A' mit $\mathrm{FV}(A) = \mathrm{FV}(A')$ und $\mathcal{N} \models \forall(A \leftrightarrow A')$. Damit ist dann das Lemma bewiesen.
1. Für $A \in \Delta_0$ sei $A' := \exists z A$ mit $z \notin \mathrm{FV}(A)$.
2. Sei $A' = \exists x \widetilde{A}$ und $B' = \exists y \widetilde{B}$. Dann
$(A \vee B)' := \exists z(\widetilde{A}_x(z) \vee \widetilde{B}_y(z))$, $(A \wedge B)' := \exists z(\widetilde{A}_x(\pi_1 z) \wedge \widetilde{B}_y(\pi_2 z))$, $(\exists v A)' := \exists z\, \widetilde{A}_{x,v}(\pi_1 z, \pi_2 z)$,
$(\forall v < t\, A)' := \exists z \forall v < t \exists x < z\, \widetilde{A}$, wobei $z \notin \mathrm{Var}(\widetilde{A}) \cup \mathrm{Var}(\widetilde{B})$ bzw. $z \notin \mathrm{Var}(\widetilde{A})(\cup \mathrm{Var}(t))$. △

Definition
1. Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt *rekursiv*, wenn die Relation
$\mathsf{Graph}(f) := \{(\vec{a}, b) \in \mathbb{N}^{n+1} : f(\vec{a}) = b\}$ rekursiv aufzählbar ist.
2. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt *rekursiv*, wenn ihre charakteristische Funktion $\mathbf{1}_R$ rekursiv ist.

Lemma 4.14
Eine Relation $Q \subseteq \mathbb{N}^n$ ist genau dann rekursiv, wenn Q und $\mathbb{N}^n \setminus Q$ rekursiv aufzählbar sind.
Beweis:
1. Seien Q und $\mathbb{N}^n \setminus Q$ rekursiv aufzählbar. Wegen $[\,\mathbf{1}_Q(\vec{a}) = b \Leftrightarrow (\vec{a} \in Q \wedge b = 1) \vee (\vec{a} \in \mathbb{N}^n \setminus Q \wedge b = 0)\,]$ und Lemma 4.13 ist dann $\mathsf{Graph}(\mathbf{1}_Q)$ rekursiv aufzählbar und somit $\mathbf{1}_Q$ rekursiv.
2. Sei Q rekursiv. Dann ist $G := \mathsf{Graph}(\mathbf{1}_Q)$ rekursiv aufzählbar, und es gilt $[\,\vec{a} \in Q \Leftrightarrow (\vec{a}, 1) \in G\,]$ und $[\,\vec{a} \in \mathbb{N}^n \setminus Q \Leftrightarrow (\vec{a}, 0) \in G\,]$, also Q und $\mathbb{N}^n \setminus Q$ rekursiv aufzählbar. △

Korollar
$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekursiv $\implies$ $\mathsf{Graph}(f)$ rekursiv.
Beweis: Sei $G := \mathsf{Graph}(f)$.
f rekursiv $\Rightarrow$ G rek. aufzb. & $\mathbb{N}^{n+1} \setminus G = \{(\vec{a}, b) : \exists i((\vec{a}, i) \in G \wedge i \neq b)\}$ $\Rightarrow$ G, $\mathbb{N}^{n+1} \setminus G$ rek. aufzb. .

Lemma 4.15
Die Menge aller rekursiven Funktionen ist die kleinste Funktionenmenge $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}^n$, für die gilt:
1. $\mathbf{0}^n$, S, $\mathsf{I}_i^n \in \mathcal{R}$,
2. $h \in \mathcal{R}^m$ & $g_1, ..., g_m \in \mathcal{R}^n$ & $m, n \geq 1 \Rightarrow (\circ h g_1 ... g_m) \in \mathcal{R}^n$,
3. $g \in \mathcal{R}^n$ & $h \in \mathcal{R}^{n+1} \Rightarrow (\mathsf{R} g h) \in \mathcal{R}^{n+1}$,
4. $g \in \mathcal{R}^{n+1}$ & $\forall \vec{a} \in \mathbb{N}^n \exists i[g(\vec{a}, i) = 0]$ & $n \geq 1 \Rightarrow (\mu g) \in \mathcal{R}^n$,
wobei $(\mu g)(\vec{a}) := \min\{i \in \mathbb{N} : g(\vec{a}, i) = 0\}$.

Insbesondere ist jede primitiv rekursive Funktion rekursiv.
Beweis:
Sei $\mathcal{R}$ die kleinste Funktionenmenge, welche den Bedingungen 1.–4. genügt,
und sei $\mathcal{R}'$ die Menge aller rekursiven Funktionen.
I. $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$: Sei $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $\mathsf{Graph}(f)$ rekursiv aufzählbar.
Dann existiert ein $h \in \mathrm{PR}^{n+1}$ mit $(f(\vec{a}) = b \Leftrightarrow \exists i\, h(\vec{a}, b, i) = 0)$. Folglich
$f(\vec{a}) = \pi_1(\min\{j : h(\vec{a}, \pi_1(j), \pi_2(j)) = 0\}$ und somit $f = (\circ \pi_1(\mu g))$, wobei $g(\vec{a}, j) := h(\vec{a}, \pi_1(j), \pi_2(j))$.
II. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$:
Hier reicht es zu zeigen, daß für $\mathcal{R}'$ (an Stelle von $\mathcal{R}$) die Bedingungen 1.–4. gelten. Dies folgt aber mittels Lemma 4.13 aus den folgenden Äquivalenzen:
$(\circ h g_1 ... g_m)(\vec{a}) = b \Leftrightarrow \exists b_1 \ldots \exists b_m[h(b_1, ..., b_m) = b \wedge g_1(\vec{a}) = b_1 \wedge \ldots \wedge g_m(\vec{a}) = b_m]$.
$(\mathsf{R} g h)(\vec{a}, k) = b \Leftrightarrow \exists c[g(\vec{a}) = (c)_0 \wedge b = (c)_k \wedge \forall i < k(\, h(\vec{a}, i, (c)_i) = (c)_{i+1}\,)]$.
$(\mu g)(\vec{a}) = b \Leftrightarrow g(\vec{a}, b) = 0 \wedge \forall i < b \exists c[c \neq 0 \wedge g(\vec{a}, i) = c]$. △

Churchsche These
Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (Relation $Q \subseteq \mathbb{N}^n$) ist genau dann im intuitiven Sinn berechenbar (entscheidbar), wenn sie rekursiv ist.

5 Der 1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Definition
Eine *primitiv rekursiv repräsentierte Sprache* ist ein Paar $(\mathcal{L}, SN)$
bestehend aus einer Sprache $\mathcal{L}$ 1. Stufe und einer injektiven Abbildung $SN : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$, für die gilt:
– Für jedes n-st. Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$ ist $SN(f) = \langle n, 1, i\rangle$ mit $i \in \mathbb{N}$.
– Für jedes n-st. Relationszeichen $p \in \mathcal{L}$ ist $SN(p) = \langle n, 2, i\rangle$ mit $i \geq 1$.
– Die Menge $SN(\mathcal{L}) := \{SN(q) : q \in \mathcal{L}\}$ ist primitiv rekursiv.

Vereinbarung
$(\mathcal{L}, SN)$ bezeichne eine im folgenden festgehaltene primitiv rekursiv repräsentierte Sprache.
Funktions- und Relationszeichen seien, soweit nichts anderes gesagt wird, stets Elemente von $\mathcal{L}$.
Die Begriffe "Term", "Formel" etc. beziehen sich stets auf $\mathcal{L}$. – Abk.: $(a)_{i,j} := ((a)_i)_j$.

Definition
$SN(v_i) := \langle 0, 0, i\rangle$, $SN(\to) := \langle 2, 0, 0\rangle$, $SN(\forall) := \langle 2, 0, 1\rangle$, $SN(\bot) := \langle 0, 2, 0\rangle$, $SN(=) := \langle 2, 2, 0\rangle$.

Definition von $\ulcorner E \urcorner$ für jeden Ausdruck E
$\ulcorner v_i \urcorner := \langle SN(v_i)\rangle$, $\ulcorner qE_1...E_n \urcorner := \langle SN(q), \ulcorner E_1 \urcorner, ..., \ulcorner E_n \urcorner\rangle$, $\ulcorner \forall xA \urcorner := \langle SN(\forall), \ulcorner x \urcorner, \ulcorner A \urcorner\rangle$

Bemerkung: $\ulcorner E \urcorner = \ulcorner E' \urcorner \;\Rightarrow\; E = E'$.

Definition
Eine Formel A heiße *n-stellig*, falls $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$.
Wir schreiben dann $A(t_1, ..., t_n)$ für $A_{v_1,...,v_n}(t_1, ..., t_n)$.
Offenbar gilt: A 0-stellig $\Leftrightarrow \mathrm{FV}(A) = \emptyset$.

VAR:= Menge aller Variablen
TER:= Menge aller Terme
PRIM:= Menge aller Primformeln
FOR:= Menge aller Formeln
$\mathrm{FOR}^n :=$ Menge aller n-stelligen Formeln

Definition
Ist X eine Menge von Ausdrücken, so sei $\ulcorner X \urcorner := \{\ulcorner E \urcorner : E \in X\}$.
Eine Menge X von Ausdrücken heiße *primitiv rekursiv* (bzw. *rekursiv* bzw. *rekursiv aufzählbar*), wenn die Menge $\ulcorner X \urcorner$ die betreffende Eigenschaft hat.

$\ulcorner \mathrm{FV} \urcorner := \{(\ulcorner x \urcorner, \ulcorner E \urcorner) : E$ ist Ausdruck und $x \in \mathrm{FV}(E)\}$
$\ulcorner \mathrm{SB} \urcorner := \{(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner x \urcorner, \ulcorner A \urcorner) : t \in \mathrm{TER},\, x \in \mathrm{VAR},\, A \in \mathrm{FOR},\, \mathrm{FV}(t) \cap \mathrm{BV}_x(A) = \emptyset\}$

Lemma 5.1
Die Relationen $\ulcorner \mathrm{VAR} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{TER} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{PRIM} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{FOR} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{FV} \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{FOR}^n \urcorner$, $\ulcorner \mathrm{SB} \urcorner$ sind primitiv rekursiv.
Beweis :
Die Behauptung folgt mittels Lemma 4.2 und Lemma 4.11 aus folgenden Äquivalenzen:
1. $a \in \ulcorner \mathrm{VAR} \urcorner \;\Leftrightarrow\; a = \langle\langle 0, 0, (a)_{0,2}\rangle\rangle$
2. $a \in \ulcorner \mathrm{TER} \urcorner \;\Leftrightarrow\; a \in \ulcorner \mathrm{VAR} \urcorner \vee [\,(a)_0 = \langle \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1, 1, (a)_{0,2}\rangle \in SN(\mathcal{L}) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1((a)_{i+1} \in \ulcorner \mathrm{TER} \urcorner)\,]$
3. $a \in \ulcorner \mathrm{PRIM} \urcorner \;\Leftrightarrow$
$\mathrm{lh}(a) > 0 \wedge \forall i < \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1((a)_{i+1} \in \ulcorner \mathrm{TER} \urcorner) \wedge (a)_0 = \langle \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1, 2, (a)_{0,2}\rangle \in SN(\mathcal{L}) \cup \{SN(=), SN(\bot)\}$
4. $a \in \ulcorner \mathrm{FOR} \urcorner \;\Leftrightarrow$
$a \in \ulcorner \mathrm{PRIM} \urcorner \vee$
$[\,\mathrm{lh}(a) = 3 \wedge (a)_0 = SN(\to) \wedge (a)_1 \in \ulcorner \mathrm{FOR} \urcorner \wedge (a)_2 \in \ulcorner \mathrm{FOR} \urcorner\,] \vee$
$[\,\mathrm{lh}(a) = 3 \wedge (a)_0 = SN(\forall) \wedge (a)_1 \in \ulcorner \mathrm{VAR} \urcorner \wedge (a)_2 \in \ulcorner \mathrm{FOR} \urcorner\,]$
5. $(j, a) \in \ulcorner \mathrm{FV} \urcorner \;\Leftrightarrow$
$j = a \in \ulcorner \mathrm{VAR} \urcorner \vee$
$[\,a \in \ulcorner \mathrm{FOR} \urcorner \cup \ulcorner \mathrm{TER} \urcorner \wedge \exists i < \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1((j, (a)_{i+1}) \in \ulcorner \mathrm{FV} \urcorner) \wedge ((a)_0 = SN(\forall) \to j \neq (a)_1)\,]$
6. $a \in \ulcorner \mathrm{FOR}^n \urcorner \;\Leftrightarrow\; a \in \ulcorner \mathrm{FOR} \urcorner \wedge \forall i < a((i, a) \in \ulcorner \mathrm{FV} \urcorner \to 1 \leq (i)_{0,2} \leq n)$

7. $(c,j,a) \in \ulcorner\mathrm{SB}\urcorner \;\Leftrightarrow\; c \in \ulcorner\mathrm{TER}\urcorner \wedge j \in \ulcorner\mathrm{VAR}\urcorner \wedge a \in \ulcorner\mathrm{FOR}\urcorner \wedge$
$(a \in \ulcorner\mathrm{PRIM}\urcorner \vee$
$[\,(a)_0 = \mathit{SN}(\to) \wedge (c,j,(a)_1) \in \ulcorner\mathrm{SB}\urcorner \wedge (c,j,(a)_2) \in \ulcorner\mathrm{SB}\urcorner\,] \vee$
$[\,(a)_0 = \mathit{SN}(\forall) \wedge (\,(j,a) \in \ulcorner\mathrm{FV}\urcorner \to ((a)_1,c) \notin \ulcorner\mathrm{FV}\urcorner \wedge (c,j,(a)_2) \in \ulcorner\mathrm{SB}\urcorner)]).$ △

Definition $(\mathsf{Sub} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N})$

$$\mathsf{Sub}(c_1,c_2,a) := \begin{cases} c_1 & \text{falls } a = c_2 \\ a & \text{falls } a = \langle \mathit{SN}(\forall), c_2, (a)_2\rangle \\ \langle (a)_0, \mathsf{Sub}(c_1,c_2,(a)_1), \ldots, \mathsf{Sub}(c_1,c_2,(a)_{\mathrm{lh}(a)-1})\rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 5.2
a) $\mathsf{Sub}(\ulcorner t\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner E\urcorner) = \ulcorner E_x(t)\urcorner$ $(t \in \mathrm{TER},\ x \in \mathrm{VAR},\ E \in \mathrm{TER} \cup \mathrm{FOR})$
b) Die Funktion Sub ist primitiv rekursiv.
Beweis :
a) Induktion nach dem Aufbau von E: Abk.: $\phi(E) := \mathsf{Sub}(\ulcorner t\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner E\urcorner)$
1. $E = x$: $\phi(E) = \ulcorner t\urcorner = \ulcorner E_x(t)\urcorner$.
2. $E = y \neq x$: $\phi(E) = \langle \mathit{SN}(y)\rangle = \ulcorner y\urcorner = \ulcorner E_x(t)\urcorner$.
3. $E = qE_1...E_n$ mit $q \in \mathcal{L} \cup \{=, \perp, \to\}$: $\phi(E) = \langle \mathit{SN}(q), \phi(E_1), \ldots, \phi(E_n)\rangle =$
$\langle \mathit{SN}(q), \ulcorner (E_1)_x(t)\urcorner, \ldots, \ulcorner (E_n)_x(t)\urcorner\rangle = \ulcorner q(E_1)_x(t) \ldots (E_n)_x(t)\urcorner = \ulcorner E_x(t)\urcorner$.
4. $E = \forall y A$ mit $y \neq x$: $\phi(E) = \langle \mathit{SN}(\forall), \phi(y), \phi(A)\rangle = \langle \mathit{SN}(\forall), \ulcorner y\urcorner, \ulcorner A_x(t)\urcorner\rangle = \ulcorner \forall y\, A_x(t)\urcorner = \ulcorner E_x(t)\urcorner$.
5. $E = \forall x A$: $\phi(E) = \ulcorner E\urcorner = \ulcorner E_x(t)\urcorner$.
b)
Def.: $g(a,d,0) := \langle (a)_0\rangle$, $g(a,d,m+1) := g(a,d,m) * \langle (d)_{(a)_{m+1}}\rangle$
g ist prim. rek. und $g(a,d,k) = \langle (a)_0, (d)_{(a)_1}, \ldots, (d)_{(a)_k}\rangle$.
Def.:

$$h(c_1,c_2,a,d) := \begin{cases} c_1 & \text{falls } a = c_2 \\ a & \text{falls } a = \langle \mathit{SN}(\forall), c_2, (a)_2\rangle \\ g(a,d,\mathrm{lh}(a) \dot{-} 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

h ist primitiv rekursiv, und im Fall "sonst" gilt:
$\mathsf{Sub}(c_1,c_2,a) = \langle (a)_0, \mathsf{Sub}(c_1,c_2,(a)_1), \ldots, \mathsf{Sub}(c_1,c_2,(a)_{\mathrm{lh}(a)-1})\rangle =$
$\langle (a)_0, \big(\overline{\mathsf{Sub}}(c_1,c_2,a)\big)_{(a)_1}, \ldots, \big(\overline{\mathsf{Sub}}(c_1,c_2,a)\big)_{(a)_{\mathrm{lh}(a)-1}}\rangle = g(a, \overline{\mathsf{Sub}}(c_1,c_2,a), \mathrm{lh}(a) \dot{-} 1) =$
$h(c_1,c_2,a,\overline{\mathsf{Sub}}(c_1,c_2,a))$. △

Definition
Ist Σ ein Axiomensystem, so sei $\mathsf{Bew}_\Sigma := \{(\ulcorner A\urcorner, \langle \ulcorner A_0\urcorner, ..., \ulcorner A_n\urcorner\rangle) : (A_0, ..., A_n) \text{ ist Herleitung von } A \text{ aus } \Sigma\}$.

Satz 5.3
Ist Σ prim. rek. (bzw. rek. bzw. rek. aufzb.), so ist auch Bew_Σ prim. rek. (bzw. rek. bzw. rek. aufzb.).
Beweis :
$(a,c) \in \mathsf{Bew}_\Sigma \;\Leftrightarrow$
$\mathrm{lh}(c) \geq 1 \wedge a = \mathrm{hd}(c) \wedge \forall k < \mathrm{lh}(c)[(c)_k \in \ulcorner\Sigma\urcorner \cup \ulcorner\mathrm{LogAx}_\forall\urcorner \vee \exists i,j < k((c)_j = \langle \mathit{SN}(\to), (c)_i, (c)_k\rangle)]$
Bleibt noch zu zeigen, daß $\mathrm{LogAx}_\forall$ prim. rek. ist.

HS 1: Die Menge AX aller logischen Axiome ist primitiv rekursiv.
Beweis: Abk.: $(a \dot{\to} b) := \langle \mathit{SN}(\to), a, b\rangle$.
Offenbar gilt: $k \in \mathrm{AX} \;\Leftrightarrow\;$ ($k \in \ulcorner\mathrm{FOR}\urcorner$ und einer der Fälle 1.–9. liegt vor).
1. $\exists a < k[\,k = (a \dot{\to} a)\,]$
2. $\exists a,b < k[\,k = (a \dot{\to} (b \dot{\to} a))\,]$
3. $\exists a,b,c < k[\,k = ((c \dot{\to} (a \dot{\to} b)) \dot{\to} ((c \dot{\to} a) \dot{\to} (c \dot{\to} b)))\,]$
4. $\exists a < k[\,k = (((a \dot{\to} \ulcorner\perp\urcorner) \dot{\to} \ulcorner\perp\urcorner) \dot{\to} a)\,]$
5. $\exists a,i,c < k[\,k = (\langle \mathit{SN}(\forall), i, a\rangle \dot{\to} \mathsf{Sub}(c,i,a)) \wedge (c,i,a) \in \ulcorner\mathrm{SB}\urcorner)\,]$
6. $\exists a,b,i < k[\,k = (\langle \mathit{SN}(\forall), i, (a \dot{\to} b)\rangle \dot{\to} (\langle \mathit{SN}(\forall), i, a\rangle \dot{\to} \langle \mathit{SN}(\forall), i, b\rangle))\,]$
7. $\exists a,i < k[\,k = (a \dot{\to} \langle \mathit{SN}(\forall), i, a\rangle) \wedge (i,a) \notin \ulcorner\mathrm{FV}\urcorner\,]$
8. $\exists c < k[\,k = \langle \mathit{SN}(=), c, c\rangle\,]$
9. $\exists a,b,c,d < k[\,k = (\langle \mathit{SN}(=), a, b\rangle \dot{\to} (c \dot{\to} d)) \wedge c,d \in \ulcorner\mathrm{PRIM}\urcorner \wedge (a,b,\pi(c,d)) \in Q]$,

wobei $(a,b,\pi(c,d)) \in Q \;:\Leftrightarrow\; c = d \vee [a = c \wedge b = d] \vee$
$[\mathrm{lh}(c) = \mathrm{lh}(d) > 0 \wedge (c)_0 = (d)_0 \wedge \forall i < \mathrm{lh}(c) \dot{-} 1((a,b,\pi((c)_{i+1},(d)_{i+1})) \in \ulcorner \mathrm{SB} \urcorner)]$.

HS 2: $\mathrm{LogAx}_\forall$ ist prim. rekursiv.
Beweis: $a \in \ulcorner \mathrm{LogAx}_\forall \urcorner \;\Leftrightarrow\; a \in \ulcorner \mathrm{AX} \urcorner \vee (\mathrm{lh}(a) = 3 \wedge (a)_0 = \mathit{SN}(\forall) \wedge (a)_1 \in \ulcorner \mathrm{VAR} \urcorner \wedge (a)_2 \in \ulcorner \mathrm{LogAx}_\forall \urcorner)$. $\triangle$

Satz 5.4
Ist Σ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem,
so ist auch die Menge $\{A : \Sigma \vdash A\}$ aller logischen Folgerungen aus Σ rekursiv aufzählbar.
Beweis :
$a \in \{\ulcorner A \urcorner : \Sigma \vdash A\} \;\Leftrightarrow\;$ Es gibt eine Herleitung $(A_0, ..., A_n)$ aus Σ mit $a = \ulcorner A_n \urcorner \;\Leftrightarrow\; \exists b\, (a,b) \in \mathsf{Bew}_\Sigma$. $\triangle$

Definition
Eine Theorie T heißt *rekursiv axiomatisierbar*,
wenn sie ein rekursives Axiomensystem besitzt und $\mathrm{L}(T) = \mathcal{L}$ ist.

Lemma 5.5
Für jede Theorie T mit $\mathrm{L}(T) = \mathcal{L}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) T ist rekursiv aufzählbar.
(ii) T besitzt ein prim. rekursives Axiomensystem.
(iii) T ist rekursiv axiomatisierbar.
Beweis :
(i)$\Rightarrow$(ii): Sei $f \in \mathrm{PR}^1$ mit $\ulcorner T \urcorner = f(\mathbb{N})$.
Def.: A_n :=die Formel mit $\ulcorner A_n \urcorner = f(n)$, $B_0 := A_0$, $B_{n+1} := B_n \wedge A_{n+1}$; $\Sigma := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$
1. Σ ist Axiomensystem von T: klar.
2. Σ ist prim. rek.: Wie man leicht sieht, ist die Funktion $n \mapsto \ulcorner B_n \urcorner$ prim. rek., und es gilt $n < \ulcorner B_n \urcorner$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus letzterem folgt: $a \in \ulcorner \Sigma \urcorner \Leftrightarrow \exists n < a(a = \ulcorner B_n \urcorner)$.
(ii)$\Rightarrow$(iii): trivial. (iii)$\Rightarrow$(i): Satz 5.4 +"FOR^0 ist prim. rek." $\triangle$

Satz 5.6
Jede rekursiv axiomatisierbare und vollständige Theorie T ist rekursiv.
Beweis :
Ist T inkonsistent, so $T = \mathrm{FOR}^0$. Ist T konsistent, so: $a \notin \ulcorner T \urcorner \;\Leftrightarrow\; (a \notin \ulcorner \mathrm{FOR}^0 \urcorner \vee \langle \mathit{SN}(\to), a, \ulcorner \bot \urcorner \rangle \in \ulcorner T \urcorner)$, und die Behauptung folgt mit Lemma 5.5 und Lemma 4.14. $\triangle$

Definition
Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Eine Relation $R \subseteq |\mathcal{M}|^n$ heißt *in $\mathcal{M}$ definierbar*, falls es eine n-st. Formel A gibt, so daß $R = \{(a_1, .., a_n) \in |\mathcal{M}|^n : \mathcal{M} \models A[a_1, ..., a_n]\}$.

Vereinbarung
Im folgenden setzen wir voraus, daß die Funktionszeichen $\mathbf{0}$ und S zu $\mathcal{L}$ gehören.

Definition der Terme $\underline{n}$ $(n \in \mathbb{N})$: $\underline{0} := \mathbf{0}$, $\underline{n+1} := \mathsf{S}\underline{n}$ (Diese Terme heißen *Ziffern*.)

Bemerkung:
Ist $\mathcal{N}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit $|\mathcal{N}| = \mathbb{N}$, $\mathbf{0}^\mathcal{N} = 0$, $\mathsf{S}^\mathcal{N}(a) = a + 1$, so gilt für jede n-st. Formel A und alle $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{N} \models A[a_1, ..., a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{N} \models A(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n})$.

Definition der Funktion $\mathsf{s} \in \mathrm{PR}^2$: $\mathsf{s}(a,k) := \mathsf{Sub}(\ulcorner \underline{k} \urcorner, \ulcorner v_1 \urcorner, a)$.

Satz 5.7
Sei $\mathcal{N}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit $|\mathcal{N}| = \mathbb{N}$, $\mathbf{0}^\mathcal{N} = 0$, $\mathsf{S}^\mathcal{N}(a) = a + 1$.
Sei ferner jede prim. rek. Relation in $\mathcal{N}$ definierbar.
Dann ist $\ulcorner \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \urcorner$ **nicht** in $\mathcal{N}$ definierbar, und damit $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ nicht rekursiv axiomatisierbar.
Beweis :
Vorbemerkung:
Ist M eine Menge und H eine Funktion mit $\mathrm{dom}(H) = M$, so gilt $Q := \{u \in M : u \notin H(u)\} \notin H(M)$. (Begründung: Wäre $Q = H(u_0)$, so $u_0 \in H(u_0) \Leftrightarrow u_0 \in Q \Leftrightarrow u_0 \notin H(u_0)$. Widerspruch.)

Sei nun $H : \ulcorner\mathrm{FOR}^1\urcorner \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $H(\ulcorner A\urcorner) := \{k \in \mathbb{N} : \mathcal{N} \models A(\underline{k})\}$ und $Q := \{a \in \ulcorner\mathrm{FOR}^1\urcorner : a \notin H(a)\}$.
Dann gilt $Q \notin H(\ulcorner\mathrm{FOR}^1\urcorner)$, d.h. Q ist nicht in $\mathcal{N}$ definierbar.

HS: Wäre $\ulcorner\mathrm{Th}(\mathcal{N})\urcorner$ in $\mathcal{N}$ definierbar, so auch Q.
Beweis: *Annahme:* D ist 1-st. Formel mit $\ulcorner\mathrm{Th}(\mathcal{N})\urcorner = \{a \in \mathbb{N} : \mathcal{N} \models D[a]\}$.
Nach Voraussetzung existiert eine 2-st. Formel A mit $\mathcal{N} \models A[a,b] \;\Leftrightarrow\; a \in \ulcorner\mathrm{FOR}^1\urcorner \& \mathsf{s}(a,a) = b$.
Es folgt: $a \in Q \Leftrightarrow\; a \in \ulcorner\mathrm{FOR}^1\urcorner \wedge \mathsf{Sub}(\ulcorner\underline{a}\urcorner, \ulcorner v_1\urcorner, a) \notin \ulcorner\mathrm{Th}(\mathcal{N})\urcorner$
$\Leftrightarrow\; a \in \ulcorner\mathrm{FOR}^1\urcorner \wedge \mathsf{s}(a,a) \notin \ulcorner\mathrm{Th}(\mathcal{N})\urcorner$
$\Leftrightarrow$ es existiert ein $b \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{N} \models A[a,b]$ und $b \notin \ulcorner\mathrm{Th}(\mathcal{N})\urcorner$
$\Leftrightarrow\; \mathcal{N} \models B[a]$, wobei $B := \exists y(A(v_1,y) \wedge \neg D(y))$.

Da Q nicht in $\mathcal{N}$ definierbar ist, folgt aus dem Hilfssatz, daß $\ulcorner\mathrm{Th}(\mathcal{N})\urcorner$ nicht in $\mathcal{N}$ definierbar und folglich auch nicht rekursiv aufzählbar ist. Also ist $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ nicht rek. axiomatisierbar. $\triangle$

Bemerkung:Seien A, B wie im Beweis von Satz 5.7, wobei D jetzt aber eine beliebige 1-st. Formel sein darf.
Sei ferner $k := \ulcorner B\urcorner$. Dann gilt: $(\mathcal{N} \models \neg D[\mathsf{s}(k,k)] \Leftrightarrow \mathcal{N} \models B(\underline{k}))$ und $\ulcorner B(\underline{k})\urcorner = \mathsf{Sub}(\ulcorner\underline{k}\urcorner, \ulcorner v_1\urcorner, k) = \mathsf{s}(k,k)$.
Für $C := B(\underline{k})$ gilt also: $\mathcal{N} \models C \leftrightarrow \neg D(\underline{\ulcorner C\urcorner})$.

Definition
Sei Σ ein Axiomensystem mit $\mathbf{0}, \mathsf{S} \in \mathrm{L}(\Sigma)$. Eine $(n+1)$-stellige Formel A *repräsentiert in* Σ die Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, falls für alle $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{N}$ gilt:
(1) $f(a_1, ..., a_n) = b \implies \Sigma \vdash A(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n}, \underline{b}) \wedge \forall y(A(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n}, y) \to \underline{b} = y)$.
(2) $f(a_1, ..., a_n) \neq b \implies \Sigma \vdash \neg A(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n}, \underline{b})$.
(Gilt $\Sigma \vdash \neg(\underline{b} = \underline{c})$, für alle $b, c \in \mathbb{N}$ mit $b \neq c$, so folgt (2) schon aus (1).)

Eine n-stellige Formel A *repräsentiert in* Σ die Relation $f \subseteq \mathbb{N}^n$, falls für alle $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ gilt:
(1) $(a_1, ..., a_n) \in R \implies \Sigma \vdash A(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n})$.
(2) $(a_1, ..., a_n) \notin R \implies \Sigma \vdash \neg A(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n})$.

$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (bzw. $R \subseteq \mathbb{N}^n$) heißt *repräsentierbar in* Σ, falls es eine $\mathrm{L}(\Sigma)$-Formel A gibt, die f (bzw. R) in Σ repräsentiert.

$R \subseteq \mathbb{N}$ heißt *schwach repräsentierbar in* Σ, falls es eine n-st. $\mathrm{L}(\Sigma)$-Formel A mit
$R = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n : \Sigma \vdash A(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n})\}$ gibt.

Satz 5.8 (Fixpunktlemma)
Sind alle prim. rek. Funktionen in Σ repräsentierbar,
so läßt sich zu jeder 1-stelligen $\mathrm{L}(\Sigma)$-Formel D ein $\mathrm{L}(\Sigma)$-Satz C mit $\Sigma \vdash C \leftrightarrow D(\underline{\ulcorner C\urcorner})$ angeben.
Beweis:
Sei A eine 2-st. $\mathrm{L}(\Sigma)$-Formel, welche die Funktion $a \mapsto \mathsf{s}(a,a)$ in Σ repräsentiert, und sei
$B := \exists y(A(v_1,y) \wedge D(y))$. – Dann gilt für alle $a \in \mathbb{N}$: $\Sigma \vdash B(\underline{a}) \leftrightarrow D(\underline{\mathsf{s}(a,a)})$.
Für $k := \ulcorner B\urcorner$, $C := B(\underline{k})$ haben wir außerdem $\mathsf{s}(k,k) = \ulcorner B(\underline{k})\urcorner = \ulcorner C\urcorner$. Es folgt: $\Sigma \vdash C \leftrightarrow D(\underline{\ulcorner C\urcorner})$. $\triangle$

Satz 5.9
Jede konsistente Theorie T, in der alle rekursiven Funktionen repräsentierbar sind, ist unentscheidbar (d.h. nicht rekursiv).
Beweis :
Annahme: T rekursiv.
Dann ist die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_{\ulcorner T\urcorner}$ in T repräsentierbar. Es gibt daher eine 1-st. $\mathrm{L}(T)$-Formel D, so daß für jeden Satz A gilt:
(1) $A \in T \;\Rightarrow\; T \vdash D(\underline{\ulcorner A\urcorner})$, (2) $A \notin T \;\Rightarrow\; T \vdash \neg D(\underline{\ulcorner A\urcorner})$.
Nach dem Fixpunktlemma existiert ein $\mathrm{L}(T)$-Satz C mit (3) $T \vdash C \leftrightarrow \neg D(\underline{\ulcorner C\urcorner})$.
Aus (1),(2),(3) folgt nun $(C \in T \;\Rightarrow\; T \vdash \bot)$ und $(C \notin T \;\Rightarrow\; C \in T)$, also $T \vdash \bot$. *Widerspruch.* $\triangle$

Satz 5.10 (1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)
Jede konsistente, rekursiv axiomatisierbare Theorie T, in der alle rekursiven Funktionen repräsentierbar sind, ist unvollständig.
Beweis : Die Behauptung folgt aus den Sätzen 5.6, 5.9.

6 Repräsentierbarkeit

Induktive Definition von Mengen REK^n n-stelliger Funktionen
1. $\mathbf{0}^n, \mathsf{I}_i^n \in \mathrm{REK}^n$, $\mathsf{S} \in \mathrm{REK}^1$, $+, \cdot, \mathbf{1}_< \in \mathrm{REK}^2$.
2. $h \in \mathrm{REK}^m$ & $g_1, ..., g_m \in \mathrm{REK}^m$ & $m, n \geq 1 \implies (\circ h g_1 ... g_m) \in \mathrm{REK}^n$.
3. $g \in \mathrm{REK}^{n+1}$ & $\forall \vec{a} \in \mathbb{N}^n \exists i[g(\vec{a}, i) = 0]$ & $n \geq 1 \implies (\mu g) \in \mathrm{REK}^n$.

Abk.: $\mathrm{REK} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{REK}^n$

Im folgenden wird gezeigt, daß REK abgeschlossen unter primitiver Rekursion und damit (nach Lemma 4.15) gleich der Menge aller rekursiven Funktionen ist.

Abkürzung: $\mathrm{Rest}_b^a(i) :=$ Rest von a bei Division durch $b(i+1)+1$

Lemma 6.1
Die Funktionen $\pi, \pi_1, \pi_2, \dot{-}$ und $(a, b, i) \mapsto \mathrm{Rest}_b^a(i)$ gehören zu REK.
Beweis :
1. $\pi(a, b) = b + \sum_{i<a+b}(i+1) = b + \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1) = b + H((a+b) \cdot (a+b+1))$,
wobei $H(c) := \min\{i : c \leq 2i\} = \min\{i : \mathbf{1}_<(2i, c) = 0\}$.
Daraus folgt $\pi \in \mathrm{REK}$, da REK abgeschlossen unter expliziten Definitionen und dem μ-Operator ist.

2. Sei $J(c) := \min\{i : 2c+1 \leq (i+1) \cdot (i+2)\}$. Dann $J \in \mathrm{REK}$ und
(1) $J(c) \cdot (J(c)+1) \leq 2c < (J(c)+1) \cdot (J(c)+2)$.
Andererseits gilt:
(2) $(a+b) \cdot (a+b+1) \leq (a+b) \cdot (a+b+1) + 2b < (a+b+1) \cdot (a+b+2)$.
Sei nun $c = \pi(a, b)$. Aus (1),(2) folgt $J(c) = a+b$ und somit
$\pi_2(c) = b = c \dot{-} \frac{1}{2}J(c)(J(c)+1) = c \dot{-} H(J(c)(J(c)+1))$ und $\pi_1(c) = a = c \dot{-} \pi_2(c)$.

3. $a \dot{-} b = \min\{c : a \leq b + c\}$.

4. $\mathrm{Rest}_b^a(i) = a \dot{-} f(a, b, i) \cdot (b(i+1)+1)$, wobei $f(a, b, i) := \min\{k : a < (k+1)(b(i+1)+1)\}$. △

Lemma 6.2
Zu beliebigen $k, m_0, ..., m_k \in \mathbb{N}$ gibt es $a, b \in \mathbb{N}$, so daß $\mathrm{Rest}_b^a(i) = m_i$ für $i = 0, ..., k$.
Beweis :
Sei $s := \max\{k, m_0, ..., m_k\} + 1$, $b := s!$, $b_i := b(i+1)+1$. Dann ist $m_i < b_i$, für $i = 0, ..., k$.

HS 1: $i < j \leq k \Rightarrow b_i, b_j$ sind teilerfremd .
Beweis: Sei p Primzahl mit $p|b_i$ und $p|b_j$. Dann $p|(b_j - b_i)$, d.h. $p|(j-i)b$. Wegen $j - i \leq s$ und $b = s!$ gilt $(j-i)|b$, also $p|b$. Mit $p|(b(j+1)+1)$ folgt daraus $p = 1$.

HS 2: $0 \leq a < a' < b_0 \cdot ... \cdot b_k \Rightarrow \exists i \leq k(\mathrm{Rest}_b^a(i) \neq \mathrm{Rest}_b^{a'}(i))$.
Beweis indirekt: Annahme: $r_i := \mathrm{Rest}_b^a(i) = \mathrm{Rest}_b^{a'}(i)$ für $i = 0, ..., k$.
Dann $a = b_i n_i + r_i$ & $a' = b_i n_i' + r_i$ & $r_i < b_i$ mit $n_i < n_i'$. Folglich $a' - a = (n_i - n_i')b_i$, d.h. $b_i|(a'-a)$ für $i = 0, ..., k$. Mit HS 1 folgt daraus $b_0 \cdot ... \cdot b_k|(a'-a)$. *Widerspruch zu* $a' - a < b_0 \cdot ... \cdot b_k$.

Nach HS 2 ist $a \mapsto (\mathrm{Rest}_b^a(0), ..., \mathrm{Rest}_b^a(k))$ eine injektive Abbildung von $\{a \in \mathbb{N} : a < b_0 \cdot ... \cdot b_k\}$ in $\{j : j < b_0\} \times ... \times \{j : j < b_k\}$. Da beide Menge dieselbe (endliche) Mächtigkeit haben, ist diese Abbildung auch surjektiv, d.h. es existiert ein $a \in \mathbb{N}$ mit $(\mathrm{Rest}_b^a(0), ..., \mathrm{Rest}_b^a(k)) = (m_0, ..., m_k)$. △

Satz 6.3
Die Menge REK ist abgeschlossen unter primitiver Rekursion und damit (nach Lemma 4.15) gleich der Menge aller rekursiven Funktionen.
Beweis :
Sei $g \in \mathrm{REK}^n$, $h \in \mathrm{REK}^{n+2}$ und $f = (\mathsf{R}gh)$.
Definitionen
$\beta(c, i) := \mathrm{Rest}_{\pi_2(c)}^{\pi_1(c)}(i)$,

$|a - b| := (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a)$,

$G_0(\vec{a}, b, c) := \min\{i : (b \dot{-} i) \cdot (1 \dot{-} |h(\vec{a}, i, \beta(c, i)) - \beta(c, i+1)|) = 0\}$,

$G(\vec{a}, b, c) := |g(\vec{a}) - \beta(c, 0)| + (b \dot{-} G_0(\vec{a}, b, c))$.

Dann gilt:
(1) $G \in$ REK
(2) $b \dot{-} G_0(\vec{a}, b, c) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall i < b(h(\vec{a}, i, \beta(c,i)) = \beta(c, i+1))$
(3) $\forall \vec{a} \in \mathbb{N}^n \forall b \exists c(G(\vec{a}, b, c) = 0)$
Beweis von (3): Seien $\vec{a}$ und b gegeben. Nach 6.2 existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\beta(c,i) = \mathrm{Rest}_{\pi_2(c)}^{\pi_1(c)}(i) = f(\vec{a}, i)$ für $i = 0, ..., b$. Mit (2) folgt $G(\vec{a}, b, c) = 0$.
(4) $f(\vec{a}, b) = \beta(\min\{i : G(\vec{a}, b, i) = 0\}, b)$
Beweis: Sei $c := \min\{i : G(\vec{a}, b, i) = 0\}$. Dann gilt $G(\vec{a}, b, c) = 0$ und folglich (nach (2))
$g(\vec{a}) = \beta(c, 0) \wedge \forall i < b(h(\vec{a}, i, \beta(c,i)) = \beta(c, i+1))$, d.h. $f(\vec{a}, b) = \beta(c, b)$. $\triangle$

Satz 6.4
Sei Σ ein Axiomensystem mit $\mathbf{0}, \mathsf{S} \in \mathrm{L}(\Sigma)$, für das gilt:
(X1) $\Sigma \vdash \neg(\mathsf{S}\underline{a} = \mathbf{0})$, für alle $a \in \mathbb{N}$,
$\Sigma \vdash \mathsf{S}\underline{a} = \mathsf{S}\underline{b} \to \underline{a} = \underline{b}$, für alle $a, b \in \mathbb{N}$,
(X2) die Funktionen $+$ und $\cdot$ sind in Σ repräsentierbar,
(X3) es gibt eine 2-st. $\mathrm{L}(\Sigma)$-Formel K mit
(a) $\Sigma \vdash \forall x \neg K(x, \mathbf{0})$,
(b) $\Sigma \vdash \forall x(\, K(x, \mathsf{S}\underline{a}) \leftrightarrow x = \underline{a} \vee K(x, \underline{a})\,)$, für alle $a \in \mathbb{N}$,
(c) $\Sigma \vdash \forall x(x = \underline{a} \vee K(x, \underline{a}) \vee K(\underline{a}, x))$, für alle $a \in \mathbb{N}$.
Dann ist jede rekursive Funktion in Σ repräsentierbar.
Beweis :
Abk.: $\vdash A \;:\Leftrightarrow\; \Sigma \vdash A$.
HS 1: Für alle $a, b, k \in \mathbb{N}$ gilt:
a) $a < b \;\Rightarrow \vdash \neg(\underline{a} = \underline{b})$,
b) $a \leq b \;\Rightarrow \vdash \neg K(\underline{b}, \underline{a})$,
c) $a < b \;\Rightarrow \vdash K(\underline{a}, \underline{b})$,
d) $\vdash A_x(\mathbf{0}) \wedge \ldots \wedge A_x(\underline{k-1}) \wedge K(x, \underline{k}) \to A$.
Beweis :
a) Induktion nach a. Sei $b = m + 1$.
1. $a = 0$: $(X1) \Rightarrow \vdash \neg(\mathbf{0} = \mathsf{S}\underline{m}) \;\Rightarrow \vdash \neg(\underline{a} = \underline{b})$.
2. $a = k + 1$: $k < m$ [I.V.]$\Rightarrow \vdash \neg(\underline{k} = \underline{m})$ $[(X1)]\Rightarrow \vdash \neg(\mathsf{S}\underline{k} = \mathsf{S}\underline{m})$.
b) Induktion nach a.
1. $a = 0$: $(X3a) \Rightarrow \vdash \neg K(\underline{b}, \underline{a})$.
2. $a = k + 1$: I.V. & a) $\Rightarrow \vdash \neg K(\underline{b}, \underline{k}) \wedge \neg(\underline{b} = \underline{k})$ $[(X3b)]\Rightarrow \vdash \neg K(\underline{b}, \mathsf{S}\underline{k})$.
c) $a < b$ [a), b)]$\Rightarrow \vdash \neg(\underline{a} = \underline{b}) \wedge \neg K(\underline{b}, \underline{a})$ $[(X3c)]\Rightarrow \vdash K(\underline{a}, \underline{b})$.
d) Induktion nach k:
1. $k = 0$: $(X3a) \Rightarrow \vdash K(x, \underline{k}) \to A$.
2. $k = m + 1$: Dann gilt
$\vdash A_x(\mathbf{0}) \wedge \ldots \wedge A_x(\underline{m-1}) \wedge K(x, \underline{m}) \to A$ [nach I.V.]
$\vdash K(x, \underline{m+1}) \to K(x, \underline{m}) \vee x = \underline{m}$ $[(X3b)]$
$\vdash A_x(\underline{m}) \wedge x = \underline{m} \to A$.
Daraus folgt $\vdash A_x(\mathbf{0}) \wedge \ldots \wedge A_x(\underline{m}) \wedge K(x, \underline{m+1}) \to A$.
Wir zeigen nun durch Induktion nach der Definition von REK, daß jede Funktion $f \in$ REK in Σ repräsentierbar ist. (Man beachte dabei, daß nach Hilfssatz 1 $\vdash \neg(\underline{a} = \underline{b})$ für $a \neq b$ gilt, und deshalb die Bedingung (2) in der Definition der "Repräsentierbarkeit" hier keine Rolle spielt.)
1. Die Funktionen $\mathbf{0}^n$, S, I_i^n werden offenbar durch die Formeln $v_{n+1} = \mathbf{0}$, $v_2 = \mathsf{S}v_1$, $v_{n+1} = v_i$ repräsentiert.
2. Die Funktion $\mathbf{1}_<$ wird durch die Formel $A := (K \wedge \underline{1} = v_3) \vee (\neg K \wedge \underline{0} = v_3)$ repräsentiert.
Beweis: $\mathbf{1}_<(a_1, a_2) = 1 \;\Rightarrow\; a_1 < a_2$ [HS1]$\Rightarrow \vdash K(\underline{a_1}, \underline{a_2}) \;\Rightarrow \vdash A(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{1}) \wedge (A(\underline{a_1}, \underline{a_2}, y) \to \underline{1} = y)$.
$\mathbf{1}_<(a_1, a_2) = 0 \;\Rightarrow\; a_2 \leq a_1$ [HS1]$\Rightarrow \vdash \neg K(\underline{a_1}, \underline{a_2}) \;\Rightarrow \vdash A(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{0}) \wedge (A(\underline{a_1}, \underline{a_2}, y) \to \underline{0} = y)$.
3. Sei $f = (\circ h g_1 ... g_m)$ mit $h, g_1, ..., g_m \in$ REK . Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, daß $g_1, ..., g_m$ 1-stellig sind. Nach I.V. gibt es dann 2-stellige Formeln $B_1, ..., B_m$ und eine $(m+1)$-stellige Formel C, so daß gilt:

(1) $h(b_1,...,b_m) = b \;\Rightarrow \vdash C(\underline{b_1},...,\underline{b_m},\underline{b}) \wedge \forall y(C(\underline{b_1},...,\underline{b_m},y) \to \underline{b}=y)$,

(2) $g_i(a) = b_i \;\Rightarrow \vdash B_i(\underline{a},\underline{b_i}) \wedge \forall y(B_i(\underline{a},y) \to \underline{b_i}=y)$ $(i = 1,...,m)$.

Def.: $A := \exists y_1...\exists y_m[\,C(y_1,...,y_m,v_2) \wedge B_1(v_1,y_1) \wedge ... \wedge B_m(v_1,y_m)\,]$.

Sei nun $f(a) = b$. Dann $h(b_1,...,b_m) = b$ mit $b_i := g_i(a)$ $(i = 1,...,m)$.
Mit (1),(2) folgt $\vdash C(\underline{b_1},...,\underline{b_m},\underline{b}) \wedge B_1(\underline{a},\underline{b_1}) \wedge ... \wedge B_m(\underline{a},\underline{b_m})$, und daraus $\vdash A(\underline{a},\underline{b})$.
Mit (1),(2) folgt außerdem:
$\vdash (B_1(\underline{a},y_1) \to \underline{b_1}=y_1) \wedge ... \wedge (B_m(\underline{a},y_m) \to \underline{b_m}=y_m) \wedge (C(\underline{b_1},...,\underline{b_m},y) \to \underline{b}=y)$.
Wegen $\vdash \underline{b_1}=y_1 \wedge ... \wedge \underline{b_m}=y_m \wedge C(y_1,...,y_m,y) \to C(\underline{b_1},..,\underline{b_m},y)$ folgt daraus
$\vdash B_1(\underline{a},y_1) \wedge ... \wedge B_m(\underline{a},y_m) \wedge C(y_1,...,y_m,y) \to \underline{b}=y$, und weiter
$\vdash \exists y_1...\exists y_m[\,B_1(\underline{a},y_1) \wedge ... \wedge B_m(\underline{a},y_m) \wedge C(y_1,...,y_m,y)\,] \to \underline{b}=y$.

5. Sei $f = (\mu g)$ mit $g \in \mathrm{REK}^{n+1}$ und $\forall\vec{a}\exists i[g(\vec{a},i) = 0]$. O.E.d.A. sei $n = 1$. Nach I.V. existiert dann eine 3-stellige Formel B mit: $g(a,i) = c \;\Rightarrow \vdash B(\underline{a},\underline{i},\underline{c}) \wedge (B(\underline{a},\underline{i},y) \to \underline{c}=y)$.
Definition: $A := B(v_1,v_2,\mathbf{0}) \wedge \forall x[K(x,v_2) \to \exists y(\neg(y=\mathbf{0}) \wedge B(v_1,x,y))]$.
Sei nun $f(a) = k$. Dann $g(a,k) = 0$ und $c_i := g(a,i) > 0$ für alle $i < k$.
Wir erhalten:
(1) $\vdash B(\underline{a},\underline{k},y) \to y=\mathbf{0}$
(2) $\vdash B(\underline{a},\underline{i},y) \to \neg(y=\mathbf{0})$, für $i = 0,...,k-1$ [(X1)]
(3) $\vdash \neg B(\underline{a},\underline{i},\mathbf{0})$, für $i = 0,...,k-1$ [(2)]
(4) $\vdash K(x,\underline{k}) \to \neg B(\underline{a},x,\mathbf{0})$ [(3), HS 1d]
(5) $\vdash B(\underline{a},x,\mathbf{0}) \to \neg K(x,\underline{k})$
(6) $\vdash \neg\exists y(\neg(\mathbf{0}=y) \wedge B(\underline{a},\underline{k},y))$ [(1)]
(7) $\vdash \forall x[K(x,v_2) \to \exists y(\neg(y=\mathbf{0}) \wedge B(\underline{a},x,y))] \to \neg K(\underline{k},v_2)$ [(6)]
(8) $\vdash A(\underline{a},v_2) \to \neg K(v_2,\underline{k}) \wedge \neg K(\underline{k},v_2)$ [(5),(7)]
(9) $\vdash A(\underline{a},v_2) \to \underline{k}=v_2$ [(8),(X3c)]

Ferner:
(10) $\vdash B(\underline{a},\underline{k},\mathbf{0})$
(11) $\vdash \neg(\underline{c_i}=\mathbf{0}) \wedge B(\underline{a},\underline{i},\underline{c_i})$, für $i = 0,...,k-1$
(12) $\vdash \exists y(\neg(y=\mathbf{0}) \wedge B(\underline{a},\underline{i},y))$, für $i = 0,...,k-1$
(13) $\vdash A(\underline{a},\underline{k})$. $\triangle$

Satz 6.5
Sei Σ ein Axiomensystem mit $\mathbf{0},\mathsf{S} \in \mathrm{L}(\Sigma)$.
Seien ferner N eine 1-stellige, K eine 2-stellige und **Add**, **Mult** 3-stellige $\mathrm{L}(\Sigma)$-Formeln, so daß gilt:
(1) $\Sigma \vdash N(\mathbf{0}) \wedge \forall x(N(x) \to N(\mathsf{S}x))$,
(2) $\Sigma \vdash \forall x \in N \neg(\mathsf{S}x=\mathbf{0}) \;\wedge\; \forall x,y \in N(\mathsf{S}x=\mathsf{S}y \to x=y)$,
(3) $\Sigma \vdash \forall x \in N\, \mathsf{Add}(x,\mathbf{0},x) \wedge \forall x,y,z \in N(\mathsf{Add}(x,y,z) \to \mathsf{Add}(x,\mathsf{S}y,\mathsf{S}z))$,
(4) $\Sigma \vdash \forall x,y,z_0,z_1 \in N(\mathsf{Add}(x,y,z_0) \wedge \mathsf{Add}(x,y,z_1) \to z_0=z_1)$,
(5) $\Sigma \vdash \forall x \in N\, \mathsf{Mult}(x,\mathbf{0},\mathbf{0}) \wedge \forall x,y,z,v \in N(\mathsf{Mult}(x,y,z) \wedge \mathsf{Add}(z,x,v) \to \mathsf{Mult}(x,\mathsf{S}y,v))$,
(6) $\Sigma \vdash \forall x,y,z_0,z_1 \in N(\mathsf{Mult}(x,y,z_0) \wedge \mathsf{Mult}(x,y,z_1) \to z_0=z_1)$,
(7) $\Sigma \vdash \forall x \in N\, \neg K(x,\mathbf{0})$,
(8) $\Sigma \vdash \forall x,y \in N(K(x,\mathsf{S}y) \leftrightarrow x=y \vee K(x,y))$,
(9) $\Sigma \vdash \forall x,y \in N(K(x,y) \vee x=y \vee K(y,x))$.
(Dabei sei $\forall x_1,...,x_n \in N\, A := \forall x_1...\forall x_n(N(x_1) \wedge ... \wedge N(x_n) \to A)$.)

Dann ist jede rekursive Funktion in Σ repräsentierbar.
Beweis :
Wir zeigen, daß Σ die Voraussetzungen (X1)–(X3) von Satz 6.4 erfüllt. — Abk.: $\vdash A \;:\Leftrightarrow\; \Sigma \vdash A$.

Aus (1) folgt:
(10) $\vdash N(\underline{a})$, für alle $a \in \mathbb{N}$.
Aus (2) und (10) folgt (X1) und weiter:
(11) $\vdash \neg(\underline{a}=\underline{b})$, für $a,b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$.
Aus (3) und (10) erhält man durch Induktion nach b:
(12) $\vdash \mathsf{Add}(\underline{a},\underline{b},\underline{a+b})$, für alle $a,b \in \mathbb{N}$.

Aus (12) und (4) folgt:
$\vdash \mathsf{Add}(\underline{a}, \underline{b}, z) \to \underline{a+b} = z$.
Nach (11),(12),(13) ist $+$ repräsentierbar in Σ. Die Repräsentierbarkeit von $\cdot$ erhält man analog.
Sei $K' := N(v_2) \to N(v_1) \wedge K(v_1, v_2)$.
Nach (1) gilt offenbar:
(14) $\vdash K'(x, \underline{a}) \leftrightarrow N(x) \wedge K(x, \underline{a})$, für alle $a \in \mathbb{N}$.
Aus (7) folgt $\vdash N(x) \to \neg K(x, \mathbf{0})$ und weiter [mit (14)] $\vdash \neg K'(x, \mathbf{0})$.
Aus (8) und (10) folgt $\vdash N(x) \wedge K(x, \mathsf{S}\underline{a}) \leftrightarrow x = \underline{a} \vee (N(x) \wedge K(x, \underline{a}))$, und daraus [mit (14)]
$\vdash K'(x, \underline{a}) \leftrightarrow x = \underline{a} \vee K'(x, \mathsf{S}\underline{a})$.
Aus (9) und (10) folgt $\vdash N(x) \to K(x, \underline{a}) \vee x = \underline{a} \vee K(\underline{a}, x)$, und daraus
$\vdash (N(x) \wedge K(x, \underline{a})) \vee x = \underline{a} \vee (N(x) \to N(\underline{a}) \wedge K(\underline{a}, x))$, d.h. $\vdash K'(x, \underline{a}) \vee x = \underline{a} \vee K'(\underline{a}, x)$. △

Das Axiomensystem Z_0

($\mathsf{Z}_0$1) $\forall x \neg(\mathsf{S}x = \mathbf{0}) \wedge \forall x \forall y(\mathsf{S}x = \mathsf{S}y \to x = y)$
($\mathsf{Z}_0$2) $\forall x(x + \mathbf{0} = x) \wedge \forall x \forall y(x + \mathsf{S}y = \mathsf{S}(x + y))$
($\mathsf{Z}_0$3) $\forall x(x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}) \wedge \forall x \forall y(x \cdot \mathsf{S}y = (x \cdot y) + x))$
($\mathsf{Z}_0$4) $\forall x \forall y(\exists z(x + \mathsf{S}z = y) \vee x = y \vee \exists z(y + \mathsf{S}z = x))$
Das Axiomensystem Z_0 ist offenbar konsistent.

Satz 6.6
Ist T eine Theorie mit $\mathsf{Z}_0 \subseteq T$, so sind alle rekursiven Funktionen und Relationen in T repräsentierbar.
Beweis :
Abk.: $N := (v_1 = v_1)$, $\mathsf{Add} := (v_1 + v_2 = v_3)$, $\mathsf{Mult} := (v_1 \cdot v_2 = v_3)$, $K := \exists v_3(v_1 + \mathsf{S}v_3 = v_2)$. Man hat zu zeigen, daß Z_0 zusammen mit den soeben definierten Formeln N, Add, Mult, K die Voraussetzungen (1)–(9) von Satz 6.5 erfüllt. Dies ist für alle Punkte bis auf (8) sehr leicht zu sehen. Zum Beweis von (8) benötigen wir den folgenden Hilfssatz:
($*$) $\mathsf{Z}_0 \vdash \forall x(x = \mathbf{0} \vee \exists y(x = \mathsf{S}y))$.
[Beweis: Nach ($\mathsf{Z}_0$4) haben wir $\mathsf{Z}_0 \vdash x = \mathbf{0} \vee \exists z(x + \mathsf{S}z = \mathbf{0}) \vee \exists z(\mathbf{0} + \mathsf{S}z = x)$.
Andererseits gilt $\mathsf{Z}_0 \vdash \neg\exists z(x + \mathsf{S}z) = \mathbf{0})$ und $\mathsf{Z}_0 \vdash \exists z(\mathbf{0} + \mathsf{S}z = x) \to \exists y(\mathsf{S}y = x)$.]
Aus ($*$) folgt nun $\mathsf{Z}_0 \vdash x + z = y \to x = y \vee \exists z_0(x + \mathsf{S}z_0 = y)$.
Mit $\mathsf{Z}_0 \vdash x + \mathsf{S}z = \mathsf{S}y \to x + z = y$ folgt daraus $\mathsf{Z}_0 \vdash K(x, \mathsf{S}y) \to x = y \vee K(x, y)$.
Umgekehrt gilt: $\mathsf{Z}_0 \vdash x + \mathsf{S}z = y \to x + \mathsf{SS}z = \mathsf{S}(x + \mathsf{S}z) = \mathsf{S}y$ und $\mathsf{Z}_0 \vdash x = y \to x + \mathsf{S}\mathbf{0} = \mathsf{S}y$,
woraus $\mathsf{Z}_0 \vdash x = y \vee K(x, y) \to K(x, \mathsf{S}y)$ folgt. △

Definition
Die Formeln der Sprache $\{\mathbf{0}, \mathsf{S}, +, \cdot\}$ heißen *arithmetische Formeln*.
$\mathcal{N}$ sei das Standardmodell von Z_0. (Insbesonder ist $\mathcal{N}$ also eine Struktur zur Sprache $\{\mathbf{0}, \mathsf{S}, +, \cdot\}$
Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt *arithmetisch*, wenn sie in $\mathcal{N}$ definierbar ist.

Satz 6.7
a) Jede rekursiv aufzählbare Relation ist arithmetisch.
b) $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist nicht arithmetisch.
c) $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist nicht rekursiv axiomatisierbar.
Beweis :
a) Sei $Q \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar. Dann existiert eine (primitiv) rekursive Relation $R \subseteq \mathbb{N}^2$ mit $Q = \{a \in \mathbb{N} : \exists b\,(a, b) \in R\}$. Nach 6.6 existiert eine arithmetische Formel A mit $[\,(a, b) \in R \Rightarrow \mathsf{Z}_0 \vdash A(\underline{a}, \underline{b})\,]$ und $[\,(a, b) \notin R \Rightarrow \mathsf{Z}_0 \vdash \neg A(\underline{a}, \underline{b})\,]$. Mit $\mathcal{N} \models \mathsf{Z}_0$ folgt daraus $R = \{(a, b) : \mathcal{N} \models A[a, b]\}$ und weiter $Q = \{a : \mathcal{N} \models (\exists y A(v_1, y))[a]\}$.
b),c) folgen aus 5.7 und a). △

Satz 6.8
Jede konsistente Theorie T mit $\mathsf{Z}_0 \subseteq T$ ist unentscheidbar.
Beweis : Siehe Satz 5.9 und Satz 6.6.

Satz 6.9 (1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)
Jede konsistente, rekursiv axiomatisierbare Theorie T mit $\mathsf{Z}_0 \subseteq T$ ist unvollständig.

Beweis : Siehe Satz 5.10 und Satz 6.6.

Definition $\mathrm{T}(\Sigma) := \{A : A \text{ ist } \mathrm{L}(\Sigma)\text{-Satz mit } \Sigma \vdash A\}$

Satz 6.10 (Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe)
Die Menge aller allgemeingültigen Sätze der Sprache $\mathcal{L}_0 := \{\mathbf{0}, \mathsf{S}, +, \cdot\}$ ist unentscheidbar.
Beweis :
Sei $\bigwedge \mathsf{Z}_0 := (\mathsf{Z}_0 1) \wedge \ldots \wedge (\mathsf{Z}_0 4)$, und $\mathrm{PL} := \{A : A \text{ allgemeingültiger } \mathcal{L}_0\text{-Satz}\}$.
Nach 6.8 ist $\mathrm{T}(\Sigma)$ nicht rekursiv. Andererseits gilt: $a \in \ulcorner \mathrm{T}(\Sigma) \urcorner \Rightarrow \langle SN(\rightarrow), \ulcorner \bigwedge \mathsf{Z}_0 \urcorner, a \rangle \in \ulcorner \mathrm{PL} \urcorner$.
Also kann auch PL nicht rekursiv sein. △

Definition
Ein Axiomensystem Σ heißt *ω-konsistent*, falls für jede 1-st. $\mathrm{L}(\Sigma)$-Formel A gilt:
$\Sigma \vdash \neg A(\underline{n})$, für alle $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \Sigma \nvdash \exists x A(x)$.

Ursprüngliche Form des 1. Gödelschen Unvollständigkeitssatzes
Zu jedem konsistenten, (primitiv) rekursiven Axiomensystem Σ mit $\mathsf{Z}_0 \subseteq \mathrm{T}(\Sigma)$ läßt sich ein wahrer arithmetischer Satz G mit $\Sigma \nvdash G$ angeben. Ist Σ sogar ω-konsistent, so gilt auch $\Sigma \nvdash \neg G$.
Beweis :
Natürlich geht die Behauptung von der stillschweigenden Voraussetzung aus, daß eine 'konkrete' Definition von $\mathbf{1}_{\ulcorner\Sigma\urcorner}$ im Sinne von Lemma 4.15 gegeben sei. Gemäß 5.4,6.3,6.4 und 6.6 läßt sich dann eine arithmetische Formel B_Σ angeben, für die gilt:
(1) $(a,b) \in \mathsf{Bew}_\Sigma \;\Rightarrow\; \mathsf{Z}_0 \vdash \mathsf{B}_\Sigma(\underline{a}, \underline{b})$,
(2) $(a,b) \notin \mathsf{Bew}_\Sigma \;\Rightarrow\; \mathsf{Z}_0 \vdash \neg\mathsf{B}_\Sigma(\underline{a}, \underline{b})$.
Aus dem Fixpunktlemmas erhält man einen arithmetischen Satz G mit:
(3) $\mathsf{Z}_0 \vdash G \leftrightarrow \neg\exists y \mathsf{B}_\Sigma(\underline{\ulcorner G \urcorner}, y)$.

Annahme: $\Sigma \vdash G$.
Wegen (1) gibt es dann ein b mit $\mathsf{Z}_0 \vdash \mathsf{B}_\Sigma(\underline{\ulcorner G \urcorner}, \underline{b})$. Daraus folgt $\Sigma \vdash \exists y \mathsf{B}_\Sigma(\underline{\ulcorner G \urcorner}, y)$ und weiter, mit (3), $\Sigma \vdash \neg G$. Widerspruch.
Also gilt $\Sigma \nvdash G$. Mit (2) folgt daraus
$(*)$ $\mathsf{Z}_0 \vdash \neg\mathsf{B}_\Sigma(\underline{\ulcorner G \urcorner}, \underline{b})$ für alle $b \in \mathbb{N}$.

Folglich ist die Formel $\neg\exists y \mathsf{B}_\Sigma(\underline{\ulcorner G \urcorner}, y)$, und wegen (3) auch die Formel G wahr.

Ist Σ ω-konsistent, so folgt aus $(*)$ und (3) sofort $\Sigma \nvdash \neg G$. △

7 Das Axiomensystem ZF der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre

Das Axiomensystem ZF

(Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir hier x, y, z als Abkürzungen für v_1, v_2, v_3.)

(Ext) $\forall v_0 \forall v_1 (\forall y (y \in v_0 \leftrightarrow y \in v_1) \rightarrow v_0 = v_1)$
(Pa) $\forall v_0 \forall v_1 \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z = v_0 \vee z = v_1)$
(Vm) $\forall v_1 \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists v_0 (v_0 \in v_1 \wedge z \in v_0))$
(Pot) $\forall v_1 \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall v_0 (v_0 \in z \rightarrow v_0 \in v_1))$
(Ue) $\exists v_0 (\exists x [x \in v_0 \wedge \neg\exists y (y \in x)] \wedge \forall x [x \in v_0 \rightarrow \exists y (y \in v_0 \wedge \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x))])$
(Fu) $\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y [y \in x \wedge \neg\exists z (z \in x \wedge z \in y)])$
(Er) $\forall v_3 ... \forall v_n (\forall x \forall y \forall y_0 [\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,y_0) \rightarrow y = y_0] \rightarrow \forall u \exists w \forall y [y \in w \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \varphi(x,y))])$,
für jede n-st. $\{\in\}$-Formel φ $(n \geq 2)$ und Variablen $y_0, u, w \notin \mathrm{Var}(\varphi)$

Von jetzt an verwenden wir die logischen Zeichen $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$, als metasprachliche Abkürzungen.

Voraussetzung
V sei ein im folgenden fester Bereich von Mengen derart, daß V zusammen mit der (auf V eingeschränkten) Elementbeziehung $\in$ ein Modell von ZF ist. Ferner gelte $\forall a \in V (a \subseteq V)$.
VEREINBARUNG: Unter einer *Menge* verstehen wir im folgenden stets ein Element von V.
Wir verwenden $a, b, c, d, e, f, g, h, u, w, x, y, z$ als Mitteilungszeichen für Mengen.

Definition
Ein Teilbereich X von V heißt eine *Klasse*, wenn es eine $(n+1)$-stellige $\{\in\}$-Formel φ und Mengen $a_1, ..., a_n$ gibt, so daß $X = \{x : (V, \in) \models \varphi[a_1, ..., a_n, x]\}$.

Wir verwenden $A, B, C, D, E, F, G, H, R$ als Mitteilungszeichen für Klassen.

Bemerkung:
Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht jede Klasse ist eine Menge.
Beweis: 1. Wegen $\forall a \in V (a \subseteq V)$ gilt $a = \{x : x \in a\}$, für jede Menge a.
2. $R := \{x : x \notin x\}$ ist eine Klasse, und es gilt $\forall a \in V (a \in R \leftrightarrow a \notin a)$. Wäre nun R ein Menge, so würde gelten $R \in R \leftrightarrow R \notin R$. Widerspruch.

Bemerkung:
$\emptyset := \{x : x \neq x\}$ ist eine Klasse, und mit A, B sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$,
$\bigcup A := \{x : \exists y \in A (x \in y)\}$, $\bigcap A := \{x : \forall y \in A (x \in y)\}$, $\mathrm{Pot}(A) := \{x : x \subseteq A\}$ Klassen.

Aus der Voraussetzung $(V, \in) \models (\mathrm{Pa}) \wedge (\mathrm{Vm}) \wedge (\mathrm{Pot})$ folgt:

Lemma 7.1
a) $\forall a \forall b (\{a, b\} \in V)$,
b) $\forall a (\bigcup a \in V)$,
c) $\forall a (\mathrm{Pot}(a) \in V)$,
d) $\forall a \forall b (a \cup b = \bigcup \{a, b\} \in V)$,
e) $\forall a_1 \ldots \forall a_n (\{a_1, ..., a_n\} \in V)$.

Definition $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (geordnetes Paar von a und b)

Lemma 7.2
a) $(a, b) \in V$,
b) $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.
Beweis :
a) folgt aus 7.1.
b) Sei $c := (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.
Fall 1: $a_1 = b_1$. $\{\{a_1\}\} = c = \{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} \;\Rightarrow\; \{a_1\} = \{a_2\} = \{a_2, b_2\} \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 = b_2$.
Fall 2: $a_2 = b_2$. Analog zu Fall 1.
Fall 3: $a_1 \neq b_1 \wedge a_2 \neq b_2$. $\{a_1\}, \{a_1, b_1\} \in c = \{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} \wedge \{a_1\} \neq \{a_2, b_2\} \wedge \{a_1, b_1\} \neq \{a_2\} \;\Rightarrow\; \{a_1\} = \{a_2\} \wedge \{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\} \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$. △

Definition
$A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\} := \{z : \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B)\}$.
Eine *Relation* ist eine Klasse von geordneten Paaren, d.h. eine Teilklasse von $V \times V$.
Eine *Funktion* ist eine Relation F, für die gilt: $\forall x, y, z ((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \to y = z)$.

Abkürzungen
Sei R eine Klasse.
$\mathrm{Rel}(R)$ $:\Leftrightarrow$ R ist eine Relation (i.e. $R \subseteq V \times V$)
$\mathrm{Fkt}(R)$ $:\Leftrightarrow$ R ist eine Funktion
Rxy $:\Leftrightarrow$ xRy $:\Leftrightarrow$ $(x, y) \in R$
$\mathrm{dom}(R) := \{x : \exists y\, Rxy\}$ *(Definitionsbereich von R)*
$\mathrm{ran}(R) := \{y : \exists x\, Rxy\}$ *(Wertebereich von R)*
$R|A := \{(x, y) \in R : x \in A\}$ *(Einschränkung von R auf A)*
$R[A] := \{y : \exists x \in A\, Rxy\}$ *(Bild von A unter R)*
$Q \circ R := \{(x, y) : \exists z (Rxz \wedge Qzy)\}$ *(Verkettung von Q mit R)*
$R^{-1} := \{(y, x) : Rxy\}$ *(Umkehrung von R)*

Ist F eine Funktion und $x \in \mathrm{dom}(F)$, so bezeichne $F(x)$ das eindeutig bestimmte y mit $(x, y) \in F$, (i.e. den *Funktionswert von F an der Stelle x*).
$F : A \to B$ $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{Fkt}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = A \wedge \mathrm{ran}(F) \subseteq B$ *(F ist Funktion von A in B)*
$b^a := \{f \in V : f : a \to b\}$

Eine Funktion F heißt *injektiv*, falls $\forall x_0, x_1 \in \mathrm{dom}(F)(F(x_0) = F(x_1) \to x_0 = x_1)$.

Folgerungen
1. Mit A, B, R, Q sind auch $A \times B, \mathrm{dom}(R), \mathrm{ran}(R), R|_A, R[A], Q \circ R, R^{-1}$ Klassen.
2. Sind F, G Funktionen, und ist $A \subseteq \mathrm{dom}(F) \cap \mathrm{dom}(G)$, so gilt:
a) $\mathrm{Fkt}(F|A) \wedge \mathrm{dom}(F|A) = A \wedge \mathrm{ran}(F|A) = F[A] \wedge \forall x \in A(F(x) = (F|A)(x))$,
b) $\mathrm{ran}(F) = F[\mathrm{dom}(F)] \wedge F = F|\mathrm{dom}(F)$
c) $\forall x \in A(F(x) = G(x)) \;\Rightarrow\; F|A = G|A$
d) $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(G) = A \wedge \forall x \in A(F(x) = G(x)) \;\Rightarrow\; F = G$

Lemma 7.3 (Folgerungen aus $(V, \in) \models (\mathrm{Er})$)
a) Ist F eine Funktion und $a \in V$, so $F[a] \in V$.
b) Ist C eine Klasse und $a \in V$, so $\{x \in a : x \in C\} \in V$.
c) $C \subseteq A \wedge A \in V \;\Rightarrow\; C \in V$.
d) $A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \bigcap A \in V$.

Beweis :
a) Sei $F = \{z : (V, \in) \models \psi[c_1, ..., c_n, z]\}$. Es gibt dann eine $(n+2)$-st. Formel φ mit $\forall x, y((x, y) \in F \Leftrightarrow (V, \in) \models \varphi[x, y, c_1, ..., c_n])$. Wegen $(V, \in) \models (\mathrm{Er})$ gilt daher $\{y : \exists x \in a((x, y) \in F)\} \in V$, d.h. $F[a] \in V$.
b) $F := \{(x, x) : x \in C\}$ ist offenbar eine Funktion, und es gilt
$y \in F[a] \;\Leftrightarrow\; \exists x \in a((x, y) \in F) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in a \exists x_0 (x_0 \in C \wedge (x, y) = (x_0, x_0)) \;\Leftrightarrow\; y \in a \wedge y \in C$.
c) $C \subseteq A \;\Rightarrow\; C = \{x \in A : x \in C\}$. d) Sei $a \in A$. Dann $\bigcap A \subseteq a \in V$. $\triangle$

Lemma 7.4
a) Mit a, b, r sind auch $a \cup b, a \cup b, a \setminus b, a \times b, b^a, \mathrm{dom}(r), \mathrm{ran}(r), r[a], r|a, r^{-1}, a \circ r$ Mengen.
b) $\mathrm{Rel}(R) \wedge \mathrm{dom}(R) \in V \wedge \mathrm{ran}(R) \in V \;\Rightarrow\; R \in V$.
c) $\mathrm{Fkt}(F) \;\Rightarrow\; F|_a \in V$.
d) $\mathrm{Fkt}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) \in V \;\Rightarrow\; F \in V$.

Beweis :
a) 1. $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$, $a \cap b \subseteq a$, $a \setminus b \subseteq a$.
2. $x \in a \wedge y \in b \;\Rightarrow\; \{x\}, \{x, y\} \in \mathrm{Pot}(a \cup b) \;\Rightarrow\; (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(a \cup b))$.
Also $a \times b \subseteq \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(a \cup b))$.
3. $b^a \subseteq \mathrm{Pot}(a \times b)$.
4. $(x, y) \in r \;\Rightarrow\; \{x, y\} \in \bigcup r \;\Rightarrow\; x, y \in \bigcup\bigcup r$. Also $\mathrm{dom}(r), \mathrm{ran}(r), r[a] \subseteq \bigcup\bigcup r$.
5. $r|a \subseteq r$, $r^{-1} \subseteq \mathrm{ran}(r) \times \mathrm{dom}(r)$, $a \circ r \subseteq \mathrm{dom}(r) \times \mathrm{ran}(a)$.
b),c),d) $\mathrm{Rel}(R) \;\Rightarrow\; R \subseteq \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{ran}(R)$. $F|a \subseteq a \times F[a]$. $F = F|\mathrm{dom}(F)$. $\triangle$

8 Ordinalzahlen

Definition
1. Eine Relation R heißt *transitiv*, falls gilt: $\forall x, y, z(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$.
2. $x_R := \{y : Ryx\}$ $\quad (x \in V,\ R$ Relation$)$
3. $\in := \{(y, x) : y \in x\}$. (Offenbar ist $x_\in = x$.)

Lemma 8.1
Für jede Relation R sind folgende Prinzipien äquivalent:
(I) *Existenz minimaler Elemente*:
$C \neq \emptyset \to \exists x \in C \forall y \in x_R (y \notin C)$, für jede Klasse C.
(II) *Induktion über* R:
$\forall x(\forall y \in x_R (y \in C) \to x \in C) \to \forall x(x \in C)$, für jede Klasse C.

Definition
Sei R eine Relation.
R *fundiert* $:\Leftrightarrow \forall u(u \neq \emptyset \to \exists x \in u \forall y \in x_R (y \notin u))$.
R *wohlfundiert* $:\Leftrightarrow$ R fundiert und $\forall x(x_R \in V)$.

Bemerkung:
a) Gilt (I) (oder (II)) für R, so ist R fundiert.
b) Jede fundierte Relation ist irreflexiv. [$Rzz \;\Rightarrow\; \{z\} \neq \emptyset \wedge \neg\exists x \in \{z\} \forall y \in x_R (y \notin \{z\})$]

Lemma 8.2
Für jede transitive wohlfundierte Relation R gelten die Prinzipien (I) und (II).
Beweis von (I):
Gelte $u \in C$. Fall 1: $\forall y \in u_R (y \notin C)$. Dann fertig.
Fall 2: $\exists y \in u_R (y \in C)$. Dann $a := u_R \cap C \neq \emptyset$. Da R fundiert ist, existiert ein $c \in a$ mit $\forall y \in c_R (y \notin a)$.
Aus $c \in u_R$ und der Transitivität von R folgt $c_R \subseteq u_R$. Somit $c \in C$ und $\forall y \in c_R (y \notin C)$. $\triangle$

Satz 8.3 (Rekursion über transitive wohlfundierte Relationen)
Sei R wohlfundiert und transitiv, und sei $G : A \times V \to V$. Dann existiert genau eine Funktion $F : A \to V$ mit $F(x) = G(x, F|x_R)$ für alle $x \in A$.
Beweis :
Sei $C := \{f : \mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq A \wedge \forall x \in \mathrm{dom}(f)(A \cap x_R \subseteq \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) = G(x, f|x_R))\}$ und $F := \bigcup C$.

(1) $f_1, f_2 \in C \wedge x \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2) \;\Rightarrow\; f_1(x) = f_2(x)$.

Beweis durch Induktion über R: Sei $x \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$. Dann $A \cap x_R \subseteq \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$ und nach I.V. $\forall y \in A \cap x_R (f_1(y) = f_2(y))$, d.h. $f_1|x_R = f_2|x_R$. Wegen $f_1, f_2 \in C$ folgt $f_1(x) = f_2(x)$.

(2) $\mathrm{Fkt}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = \bigcup\{\mathrm{dom}(f) : f \in C\} \wedge \forall f \in C (f = F|\mathrm{dom}(f))$.

Beweis mittels (1). (klar)

(3) $\forall x \in \mathrm{dom}(F)(A \cap x_R \subseteq \mathrm{dom}(F) \wedge F(x) = G(x, F|x_R))$

Beweis: Sei $x \in \mathrm{dom}(F)$. Dann $x \in \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(F)$ für ein $f \in C$. Folglich $A \cap x_R \subseteq \mathrm{dom}(F)$. Nach (2) gilt $F(x) = f(x) = G(x, f|x_R) = G(x, F|x_R)$.

(4) $A = \mathrm{dom}(F)$

Beweis: Die Inklusion $D(F) \subseteq A$ ist trivial. $A \subseteq \mathrm{dom}(F)$ zeigen wir durch Induktion über R.
Sei $x \in A$, und $a := A \cap x_R \subseteq \mathrm{dom}(F)$ (I.V.). Zu zeigen: $x \in \mathrm{dom}(F)$.
Da R fundiert ist, gilt $\neg Rxx$, also $x \notin a$. Sei $f := F|a \cup \{(x, G(x, F|x_R))\}$. Wir zeigen $f \in C$, woraus dann $x \in \mathrm{dom}(F)$ folgt.
Wegen $x \notin a$ gilt $\mathrm{Fkt}(f)$. Trivialerweise ist $\mathrm{dom}(f) \subseteq A$. Wegen $a \subseteq \mathrm{dom}(F)$ gilt auch $a \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Sei nun $y \in \mathrm{dom}(f)$:
1. $y \in a$: Dann $A \cap y_R \subseteq a$ (da R transitiv) und $f(y) = F(y) = G(y, F|y_R) = G(y, f|y_R)$.
2. $y = x$: In diesem Fall gilt $A \cap x_R \subseteq a$ und $f(x) = G(x, F|x_R) = G(x, f|x_R)$.

Die Eindeutigkeit von F folgt sofort durch Induktion über R. $\triangle$

Bemerkung: Auf die Voraussetzung “R transitiv” in 8.2 und 8.3 kann verzichtet werden (siehe ...).

Definition
1. $R \subseteq A \times A$ heißt *lineare Ordnung auf* A, falls gilt:
(i) $\forall x\, \neg Rxx$, (ii) $\forall x, y, z (Rzy \wedge Ryx \to Rzx)$, (iii) $\forall x, y \in A (Ryx \vee x = y \vee Rxy)$.

2. Eine lineare Ordnung R auf A heißt *Wohlordnung auf* A, falls R wohlfundiert ist.

3. A heißt *wohlgeordnet (linear geordnet) durch* R, falls $R \cap (A \times A)$ eine Wohlordnung (lineare Ordnung) auf A ist.

4. Ist $A \in V$ und R eine Wohlordnung auf A, so nennt man das Paar (A, R) eine *wohlgeordnete Menge* oder kurz *Wohlordnung*.

Bemerkung: Wird A durch R wohlgeordnet, so gilt:
a) Jede nichtleere Klasse $C \subseteq A$ besitzt ein (eindeutig bestimmtes) *kleinstes Element* $\min_R(C)$.
b) Jede Teilklasse $B \subseteq A$ wird ebenfalls durch R wohlgeordnet.

Beweis von a): Sei $Q := R \cap (A \times A)$. Nach Lemma 8.1 existiert ein $a \in C$ mit $C \cap a_Q = \emptyset$. Es folgt $\forall y \in C (\neg Rya)$ und weiter $\forall y \in C (y = a \vee Ray)$, d.h. $a = \min_R(C)$.

Definition
1. Eine Klasse A heißt *transitiv*, falls gilt $\forall x \in A (x \subseteq A)$.
2. Eine *Ordinalzahl* ist eine transitive Menge, die durch die Elementrelation $\in$ wohlgeordnet wird.
3. $On := \{x : x \text{ ist Ordinalzahl}\}$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta, \zeta$ bezeichnen im folgenden stets Ordinalzahlen.
Ferner schreiben wir auch $\alpha < \beta$ für $\alpha \in \beta$, sowie $\alpha \leq \beta$ für $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

Lemma 8.4
a) $\alpha \in On \ \Rightarrow \ \alpha \subseteq On \quad$ (d.h. On ist transitiv)
b) $\alpha \leq \beta \ \Leftrightarrow \ \alpha \subseteq \beta$
Beweis :
a) Sei $x \in \alpha$. Dann $x \subseteq \alpha$ und somit x wohlgeordnet durch $\in$. Bleibt zu zeigen, daß x transitiv ist. Sei also $y \in x \wedge z \in y$. Wegen $x \in \alpha$ und α transitiv folgt dann $x, y, z \in \alpha$ und weiter $z \in x$, da α durch $\in$ linear geordnet wird.
b) "$\Rightarrow$" Aus $\alpha \in \beta \in On$ folgt $\alpha \subseteq \beta$.
"$\Leftarrow$" Sei $\alpha \subseteq \beta$ und $\alpha \neq \beta$. Dann $\emptyset \neq \beta \setminus \alpha \subseteq \beta$. Folglich existiert ein $c \in \beta \setminus \alpha$ mit $c \cap (\beta \setminus \alpha) = \emptyset$. Wir zeigen nun $\alpha = c$ und somit $\alpha \in \beta$.
1. Sei $x \in \alpha$. Wegen $c \notin \alpha$, kann nicht $c = x \vee c \in x$ sein. Mit $c, x \in \beta$ folgt deshalb $x \in c$.
2. Sei $x \in c$. Dann $x \in \beta$, und mit $c \cap (\beta \setminus \alpha) = \emptyset$ folgt $x \in \alpha$. △

Satz 8.5
a) On wird durch $\in$ wohlgeordnet.
b) $On \notin V$.
Beweis :
a) 1. Sei $\alpha \in On$. Wäre $\alpha \in \alpha$, so $\exists x \in \alpha (x \in x)$ und damit α nicht wohlgeordnet durch $\in$. Also $\alpha \notin \alpha$.
2. Da jedes $\gamma \in On$ transitiv ist, gilt: $\alpha, \beta, \gamma \in On \ \& \ \alpha \in \beta \ \& \ \beta \in \gamma \ \Rightarrow \ \alpha \in \gamma$.
3. Seien $\alpha, \beta \in On$. Offenbar $\gamma := \alpha \cap \beta \in On$. Nach 1. ist $\gamma \notin \gamma$, also $\gamma \notin \alpha \vee \gamma \notin \beta$. Aus $\gamma \subseteq \alpha \wedge \gamma \subseteq \beta$ folgt mit 8.4 $(\gamma \in \alpha \vee \gamma = \alpha) \wedge (\gamma \in \beta \vee \gamma = \beta)$. Also gilt $\gamma = \alpha \vee \gamma = \beta$ und somit $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$, d.h. nach 8.3 $\ \alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$.
4. Sei $\emptyset \neq u \subseteq On$, etwa $\alpha \in u$. Zu zeigen: $\exists \gamma \in u (u \cap \gamma = \emptyset)$. Ist $u \cap \alpha = \emptyset$, so fertig. Andernfalls existiert ein $\gamma \in u \cap \alpha$ mit $u \cap \alpha \cap \gamma = \emptyset$. Wegen $\gamma \in \alpha$ gilt $\gamma \subseteq \alpha$ und somit $u \cap \alpha \cap \gamma = u \cap \gamma$.
b) Nach 8.4a und 8.5a ist On transitiv und wird durch $\in$ wohlgeordnet. Wäre $On \in V$, so wäre On eine Ordinalzahl, d.h. $On \in On$ im Widerspruch zu a). △

Korollar
a) Jede nichtleere Klasse C von Ordinalzahlen besitzt (genau) ein kleinstes Element $\min(C)$.
b) $\forall \alpha (\forall \xi \in \alpha (\xi \in C) \to \alpha \in C) \to \forall \alpha (\alpha \in C)$, für jede Klasse C.
c) Zu jedem $G : V \to V$ gibt es genau eine Funktion $F : On \to V$ mit $F(\alpha) = G(F|\alpha)$, für alle $\alpha \in On$.
Beweis :
b) Sei $C_1 := \{x : x \in On \dot{\to} \in C\}$ und $R := \in \cap (On \times On)$. Nach 8.5 und 8.2 gilt dann
$\forall x (x_R \subseteq C_1 \to x \in C_1) \to \forall x (x \in C_1)$, i.e. $\forall x \in On (\forall y \in x (y \in C) \to x \in C) \to \forall x \in On (x \in C)$.
c) Man wende 8.3 auf $R := \in \cap (On \times On)$ und $G_1 : On \times V \to V$, $G_1(\alpha, f) := G(f)$ an. △

Lemma 8.6
a) Ist $A \subseteq On$ transitiv, so gilt $(A \in V \ \Rightarrow \ A \in On)$ und $(A \notin V \ \Rightarrow \ A = On)$.
b) Für jede nichtleere Klasse $A \subseteq On$ ist $\bigcap A = \min(A)$, d.h. $\bigcap A \in A \wedge \forall \beta \in A (\bigcap A \leq \beta)$.
c) Für jede Menge $A \subseteq On$ ist $\bigcup A \in On$, und es gilt $\bigcup A = \sup(A)$ $(:= \min\{x \in On : \forall y \in A (y \leq x)\})$.
d) Für jede Klasse $A \subseteq On$ gilt: $A \in V \ \Leftrightarrow \ \exists \alpha \in On \forall x \in A (x \leq \alpha)$.
Beweis :
a) Sei $A \subseteq On$ transitiv. Nach 8.5a wird A durch $\in$ wohlgeordnet, also gilt $(A \in V \ \Rightarrow \ A \in On)$. Ist dagegen $A \notin V$, so haben wir: $\alpha \in On \ \Rightarrow \ A \not\subseteq \alpha \ \Rightarrow \ \exists \beta \in A (\beta \notin \alpha) \ \Rightarrow \ \exists \beta \in A (\alpha \leq \beta) \ \Rightarrow \ \alpha \in A$.
b) Sei $\alpha := \min(A)$. Wir haben dann $\forall \beta \in A (\alpha \subseteq \beta)$ und $\alpha \in A$. Daraus folgt $\alpha \subseteq \bigcap A \subseteq \alpha$.
c) Sei $A \subseteq On \wedge A \in V$. Wie man leicht nachrechnet ist dann $\bigcup A$ eine transitive Menge von Ordinalzahlen; nach a) also $\bigcup A \in On$. Nach Definition von $\bigcup A$ und nach 8.4b gilt außerdem für alle $x \in On$: $\bigcup A \leq x \Leftrightarrow \forall y \in A (y \leq x)$, d.h. $\bigcup A = \min\{x \in On : \forall y \in A (y \leq x)\}$.
d) "$\Rightarrow$" Aus $A \in V$ folgt mit c) $\bigcup A \in On$ und $\forall x \in A (x \leq \bigcup A)$.
"$\Leftarrow$" Aus $\forall x \in A (x \leq \alpha)$ folgt $A \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ und somit $A \in V$. △

Definition
Sei R eine Wohlordnung auf A.

Eine *Ordnungsfunktion von* (A, R) ist eine Funktion F, für die gilt:
(1) $\mathrm{dom}(F) \in On$ oder $\mathrm{dom}(F) = On$,
(2) $\mathrm{ran}(F) = A$,
(3) $\forall\alpha, \beta \in \mathrm{dom}(F)(\beta < \alpha \to F(\beta) R F(\alpha))$.

Satz 8.7
Ist R eine Wohlordnung auf A, so existiert genau eine Ordnungsfunktion F von (A, R); und zwar gilt $F(\alpha) = \min_R\{x \in A : F[\alpha] \subseteq x_R\}$ für alle $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$.
Man nennt $\mathrm{dom}(F)$ den *Ordnungstyp von* (A, R).
Ferner gilt: $(A \in V \Rightarrow \mathrm{dom}(F) \in On)$ und $(A \notin V \Rightarrow \mathrm{dom}(F) = On)$.
Beweis :
Eindeutigkeit: Sei eine F Ordnungsfunktion von (A, R). Durch transfinite Induktion nach α zeigen wir: $\alpha \in \mathrm{dom}(F) \Rightarrow F(\alpha) = \min_R\{x \in A : F[\alpha] \subseteq x_R\}$. Daraus folgt die Eindeutigkeit von F mittels 8.3.
Sei also $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$. Wegen (3) gilt $F[\alpha] \subseteq F(\alpha)_R$. Sei nun $x \in A$ mit $F[\alpha] \subseteq x_R$. Wegen $\mathrm{ran}(F) = A$ existiert ein $\beta \in \mathrm{dom}(F)$ mit $F(\beta) = x$. Wegen (3) muß dann gelten $\forall\xi \in \alpha(\xi < \beta)$ und folglich $\alpha \leq \beta$ und $F(\alpha) \leq F(\beta) = x$.
Existenz:
Definition (durch transfinite Rekursion):
$F_1 : On \to V,\ F_1(\alpha) = \begin{cases} \min_R\{x \in A : F_1[\alpha] \subseteq x_R\} & \text{falls } \exists x \in A(F_1[\alpha] \subseteq x_R) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
$D := \{\alpha \in On : \exists x \in A(F_1[\alpha] \subseteq x_R\}$ ist offenbar eine transitive Klasse von Ordinalzahlen; also $D \in On$ oder $D = On$.
Beh.: $F := F_1|D$ ist Ordnungsfunktion von (A, R).
Offenbar gilt $\mathrm{dom}(F) = D$, $\mathrm{ran}(F) \subseteq A$ und $\forall\alpha, \beta \in D(\beta < \alpha \to F(\beta) R F(\alpha))$.
Bleibt zu zeigen: $x \in A \Rightarrow x \in \mathrm{ran}(F)$.
Beweis durch R-Induktion: Sei $x \in A$. Nach I.V. ist dann $x_R \subseteq \mathrm{ran}(F)$. Offenbar ist $F^{-1}[x_R]$ transitiv. Da F injektiv ist, gilt auch $F^{-1}[x_R] \in V$; folglich $\alpha := F^{-1}[x_R] \in On$. Wegen $x_R \subseteq \mathrm{ran}(F)$ gilt $F[\alpha] = x_R$. Daraus folgt weiter $\forall y \in A(yRx \Rightarrow F[\alpha] \not\subseteq y_R)$ und somit $F(\alpha) = x$.

Korollar
Ist A eine echte Klasse (d.h. $A \notin V$) und R eine Wohlordung auf A, so existiert genau eine Bijektion $F : On \to A$ mit $\forall\alpha, \beta(\beta < \alpha \leftrightarrow F(\beta) R F(\alpha))$.

Definitionen
$0 := \emptyset, \quad x' := x \cup \{x\}, \quad \omega := \bigcap\{u : 0 \in u \land \forall x \in u(x' \in u)\}$
α heißt *Nachfolgerzahl*, falls $\exists\beta(\alpha = \beta')$.
α heißt *Limeszahl*, falls $\alpha \neq 0$ und α keine Nachfolgerzahl.
$Lim :=$ Klasse aller Limeszahlen.

Satz 8.8
a) 0 ist die kleinste Ordinalzahl und $\forall\alpha(\alpha' = \min\{\beta : \alpha < \beta\} \in On)$.
b) $\alpha \in Lim \Leftrightarrow 0 < \alpha \land \forall\beta(\beta < \alpha \to \beta' < \alpha)$.
c) ω ist die kleinste Limeszahl.
d) Für jede Klasse C gilt: $0 \in C \land \forall x \in \omega(x \in C \to x' \in C) \to \forall x \in \omega(x \in C)$. *(Vollständige Induktion)*
e) Zu $a_0 \in V$ und $G : B \to B$ existiert genau eine Funktion $F : \omega \to B$ mit $F(0) = a_0$ und $F(x') = G(F(x))$, für alle $x \in \omega$.
Beweis :
Aus dem Unendlichkeitsaxiom folgt, daß die Klasse $J := \{u : 0 \in u \land \forall x \in u(x' \in u)\}$ nichtleer ist. Also gilt: $(*)\ \omega = \bigcap J \in V \land 0 \in \omega \land \forall x \in \omega(x' \in \omega)$.
a) Nach $(*)$ ist $0 \in V$. Außerdem $0 \subseteq On$ und 0 transitiv; nach 8.6a ist also $0 \in On$. Daß 0 die *kleinste* Ordinalzahl ist, folgt mit 8.4b. Für jedes $\alpha \in On$ ist offenbar $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$ eine transitive Teilmenge von On, also $\alpha' \in On$ nach 8.6a. Mit 8.4 folgt außerdem $\forall\beta(\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha' \leq \beta)$, d.h. $\alpha' = \min\{\beta : \alpha < \beta\}$.
b) folgt aus $\forall\beta(\beta < \alpha \leftrightarrow \beta' \leq \alpha)$.
c) Sei $a := \{x \in \omega : x \in On \land x \subseteq \omega\}$. Aus $0 \in On \land \forall\alpha(\alpha' \in On)$ und $(*)$ folgt nun $a \in J$ und somit $\omega \subseteq a$, d.h. $\forall x \in \omega(x \in On \land x \subseteq \omega)$. Also ist ω eine transitive Menge von Ordinalzahlen, woraus mit 8.6a $\omega \in On$ folgt. Aus $\omega \in On$, b) und $(*)$ folgt $\omega \in Lim$. Aus b) folgt auch $Lim \subseteq J$ und damit $\forall x \in Lim(\omega \subseteq x)$.

d) Aus der Voraussetzung und $\omega \in V$ folgt $u := \omega \cap C \in J$ und daraus dann $\omega \subseteq u \subseteq C$.
e) Sei $G_1 : \omega \times V \to V$, $G_1(x,f) :=$ **if** $x = 0 \vee \neg\mathrm{Fkt}(f) \vee \cup x \notin \mathrm{dom}(f)$ **then** a_0 **else** $G(f(\cup x))$. Nach Satz 8.3 existiert genau eine Funktion $F : \omega \to V$ mit $\forall x \in \omega(F(x) = G_1(x, F|x))$. Es folgt $F(0) = a_0$ und $F(x') = G_1(x', F|x') = G((F|x')(\cup x')) = G(F(x))$ für alle $x \in \omega$. (Man beachte, daß $\forall x \in On(\cup(x') = x)$.)
$\triangle$

Auswahlaxiom, Zornsches Lemma, Wohlordnungssatz

Definition

1. f heißt *Auswahlfunktion für a* $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{Fkt}(f) \wedge \forall x \in a(x \neq \emptyset \to x \in \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) \in x)$
2. Eine Relation R heißt *partielle Ordnung*, falls R irreflexiv und transitiv ist.
3. Eine Menge K heißt *R-Kette*, falls $\forall x, y \in K(\langle x, y\rangle \in R \vee x = y \vee \langle y, x\rangle \in R)$.

Satz 8.9

Folgende Aussagen sind äquivalent:
(AC) $\forall a \exists f($ f ist Auswahlfunktion für $a)$ *(Auswahlaxiom)*
(WO) $\forall a \exists r($ r ist Wohlordnung auf $a)$ *(Wohlordnungssatz)*
(ZL) Für jede nichtleere, partiell geordnete Menge $\langle a, r\rangle$ gilt: *(Zornsches Lemma)*
Besitzt jede r-Kette $K \subseteq a$ eine obere Schranke in a,
so enhält a ein maximales Element (d.h. $\exists p \in a \neg\exists x \in a(\langle p, x\rangle \in r)$).

Beweis :
(AC) $\Rightarrow$ (ZL): Sei $\langle a, r\rangle$ eine nichtleere, partiell geordnete Menge derart, daß jede r-Kette $K \subseteq a$ eine obere Schranke in a besitzt. Wegen (AC) gibt es eine Funktion $G : V \to V$ mit $\forall x \in \mathrm{Pot}(a)(x \neq \emptyset \to G(x) \in x)$. Durch transfinite Rekursion definieren wir $F : On \to V$ mit $F(\xi) = G(\{x \in a : F[\xi] \subseteq x_r\})$ für alle $\xi \in On$. (Zur Erinnerung: $x_r = \{y : \langle y, x\rangle \in r\}$.) Sei $D := \{\xi : \{x \in a : F[\xi] \subseteq x_r\} \neq \emptyset\}$.
Dann gilt offenbar:
(1) D ist transitiv,
(2) $F[D] \subseteq A$,
(3) $\forall \eta, \xi \in D(\eta < \xi \to F(\eta) r F(\xi))$.
Nach (2) und (3) ist $F[D] \in V$ und $F|D$ injektiv, also $D \in V$. Mit (1) folgt weiter $D \in On$. Aus $D \in On \setminus D$ folgt $\{x \in a : F[D] \subseteq x_r\} = \emptyset$. Nach (3) ist $F[D]$ eine r-Kette. Sei $p \in a$ eine obere Schranke von $F[D]$. Da r transitiv ist, gilt dann $\neg\exists x \in a(\langle p, x\rangle \in r)$.

(ZL) $\Rightarrow$ (AC): Sei $a \in V$. Wir setzen $W := \{f : \mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq a \wedge \forall x \in \mathrm{dom}(f)(f(x) \in x)\}$. W ist eine Menge, denn $W \subseteq \mathrm{Pot}(a \times \cup a)$. Also können wir (ZL) auf $\langle W, \subset\rangle$ anwenden. Offenbar besitzt jede $\subset$-Kette $K \subseteq W$ eine obere Schranke in W, nämlich $\bigcup K$. Es existiert also ein $\subset$-maximales Element $f_0 \in W$.
Annahme: Es existiert ein $x \in a \setminus \{\emptyset\}$ mit $x \notin \mathrm{dom}(f_0)$. Sei $y \in x$. Dann ist $f := f_0 \cup \{\langle x, y\rangle\} \in W$ und $f_0 \subset f$. *Widerspruch*. Also $a \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathrm{dom}(f_0)$ und f_0 ist eine Auswahlfunktion für a.

(AC) $\Rightarrow$ (WO): Sei $a \in V$. Wegen (AC) existiert ein $G : V \to V$ mit $\forall x \in \mathrm{Pot}(a)(x \neq \emptyset \to G(x) \in x)$. Durch transfinite Rekursion definieren wir $F : On \to V$ mit $F(\xi) = G(a \setminus F[\xi])$. Sei $D := \{\xi : a \setminus F[\xi] \neq \emptyset\}$.
Dann gilt:
(1) D transitiv,
Beweis: $\xi \in D \wedge \beta \in \xi \Rightarrow \emptyset \neq a \setminus F[\xi] \subseteq a \setminus F[\beta]$.
(2) $F[D] \subseteq a$ und $F|D$ injektiv,
Beweis: $\xi \in D \Rightarrow a \setminus F[\xi] \in \mathrm{Pot}(a) \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow F(\xi) = G(a \setminus F[\xi]) \in a \setminus F[\xi]$.
(3) $D \in On$,
Beweis: $D \subseteq On = \mathrm{dom}(F) \wedge F[D] \subseteq a \Rightarrow D \subseteq On \wedge D \in V \Rightarrow D \in On$.
(4) $a \subseteq F[D]$.
Beweis: $D \in On \Rightarrow D \in On \setminus D = \{\xi : a \setminus F[\xi] = \emptyset\} \Rightarrow a \setminus F[D] = \emptyset \Rightarrow a \subseteq F[D]$.
Es ist also $F|D$ eine Bijektion von der Ordinalzahl D auf a. Folglich ist $r := \{\langle F(\eta), F(\xi)\rangle : \xi, \eta \in D \wedge \eta < \xi\}$ eine Wohlordnung auf a.

(WO) $\Rightarrow$ (AC): Sei $a \in V$. Wegen (WO) existiert eine Wohlordnung r auf $\cup a$.
Dann ist $f : a \setminus \{\emptyset\} \to \cup a$, $f(x) := \min_r(x)$ eine Auswahlfunktion für a. $\triangle$

9 Kardinalzahlen

Abkürzungen:
$F : A \longleftrightarrow B \ :\Leftrightarrow\ F : A \to B$ injektiv $\wedge F[A] = B$,
$a \sim b \ :\Leftrightarrow\ \exists f(\, f : a \longleftrightarrow b\,)$,
$a \preceq b \ :\Leftrightarrow\ \exists f(\, f : a \to b$ injektiv).

Lemma 9.1
Für jede Menge a sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) $\exists r(\, r$ ist Wohlordnung auf $a\,)$,
(ii) $\exists \alpha \in On(\, \alpha \sim a\,)$,
(iii) $\exists \alpha \in On \exists f(\, f : \alpha \to a \wedge f[\alpha] = a\,)$,
(iv) $\exists g(\, g : a \to On$ injektiv).
Beweis :
(i)⇒(ii): 8.7. (ii)⇒(iii): trivial. (iii)⇒(iv): $g(x) := \min\{\xi \in \alpha : f(\xi) = x\}$.
(iv)⇒(i): $r := \{(y, x) \in a \times a : g(y) < g(x)\}$. △

Lemma 9.2
a) $a \preceq a$,
b) $a \preceq b \wedge b \preceq c \ \Rightarrow\ a \preceq c$,
c) $a \subseteq b \ \Rightarrow\ a \preceq b$,
d) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Satz 9.3 (Cantor-Bernstein)
$a \preceq b \wedge b \preceq a \ \Rightarrow\ a \sim b$.
Beweis :
O.E.d.A.: $b \subseteq a$. Sei $f : a \to b$ injektiv. Wir definieren:
$h : \omega \to \mathrm{Pot}(a),\ h(0) := a \setminus b,\ h(n') := f[h(n)],\quad \hat{a} := \bigcup \mathrm{ran}(h) = \bigcup_{n\in\omega} h(n)$.
$g : a \to a,\ g(x) :=$ **if** $x \in \hat{a}$ **then** $f(x)$ **else** x.
Es gilt:
(1) $\forall x \in \hat{a}(g(x) \in \hat{a})$
Beweis: $x \in h(n) \Rightarrow\ g(x) = f(x) \in h(n') \subseteq \hat{a}$.
(2) $g[a] \subseteq b$
Beweis: $x \in \hat{a} \Rightarrow\ g(x) = f(x) \in b$. $\quad x \in a \setminus \hat{a} \Rightarrow\ g(x) = x \in a \setminus h(0) = b$.
(3) g injektiv
Beweis durch Fallunterscheidung: Ist $x \in \hat{a}$ und $y \notin \hat{a}$, so $g(x) \in \hat{a}$ und $g(y) = y \notin \hat{a}$, also $g(x) \neq g(y)$. Die übrigen Fälle sind trivial.
(4) $g[a] = b$
Beweis: Sei $y \in b$. Ist $y \notin \hat{a}$, so $g(y) = y$. Sei jetzt $y \in \hat{a}$, d.h. $y \in h(n)$ für ein $n \in \omega$. Wegen $y \in b$ muß $n > 0$ sein, also $n = k'$ und $y = f(x)$ mit $x \in h(k) \subseteq \hat{a}$; folglich $y = g(x)$. △

Satz 9.4 $\mathrm{Pot}(a) \not\preceq a$.
Beweis :
Hilfssatz: Es existiert keine surjektive Funktion von a auf $\mathrm{Pot}(a)$.
Beweis: Sei $f : a \to \mathrm{Pot}(a)$. Dann $u := \{x \in a : x \notin f(x)\} \in \mathrm{Pot}(a)$. Wäre $u = f(x)$ für ein $x \in a$, so $x \in f(x) \Leftrightarrow x \in u \Leftrightarrow x \notin f(x)$. *Widerspruch.* Also $u \in \mathrm{Pot}(a) \setminus f[a]$.
Aus 9.3 und $a \preceq \mathrm{Pot}(a)$ folgt $(\mathrm{Pot}(a) \preceq a \ \Rightarrow\ \mathrm{Pot}(a) \sim a)$.
Aufgrund des Hilfssatzes kann also nicht $\mathrm{Pot}(a) \preceq a$ gelten. △

Definition
Eine Ordinalzahl α heißt *Kardinalzahl*, falls $\neg\exists\beta < \alpha(\, \alpha \sim \beta\,)$.
$Kard$:= Klasse aller Kardinalzahlen.
$$|a| := \begin{cases} \min\{\xi \in On : a \sim \xi\} & \text{falls } \exists\xi(a \sim \xi) \\ On & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung:
Ist $|a| \in On$ (d.h. $\exists\xi(a \sim \xi)$), so ist $|a|$ eine Kardinalzahl, und man nennt $|a|$ *die Kardinalzahl* (oder *Mächtigkeit*) von a.

Lemma 9.5
a) $\alpha \in Kard \Leftrightarrow \neg\exists\xi < \alpha(\alpha \preceq \xi)$,
b) $|a| \in Kard \Rightarrow |a| = \min\{\xi \in On : a \preceq \xi\}$,
c) $|a| \in Kard \Rightarrow (a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|)$,
d) $|a| \in Kard \Rightarrow (b \preceq a \Leftrightarrow |b| \leq |a|)$,
e) $|a| \in Kard$ & $\mathrm{Fkt}(F) \Rightarrow |F[a]| \leq |a|$.
Beweis :
a) "$\Leftarrow$" trivial. "$\Rightarrow$" $\xi < \alpha \,\&\, \alpha \preceq \xi \Rightarrow \alpha \sim \xi \Rightarrow \alpha \leq \xi$. *Widerspruch.*
b) $\xi < |a| \Rightarrow |a| \not\preceq \xi \Rightarrow a \not\preceq \xi$.
c) trivial.
d) "$\Leftarrow$" trivial. "$\Rightarrow$" b)$\Rightarrow$ $|b| = \min\{\xi : b \preceq \xi\} \Rightarrow |b| \leq |a|$.
e) Sei r eine Wohlordnung auf a. Wir definieren: $h : F[a] \to a,\ h(y) := \min_r\{x \in a : F(x) = y\}$.
Offenbar ist h injektiv und somit $F[a] \preceq a$, also nach d) $|F[a]| \leq |a|$. △

Lemma 9.6
Ist $\kappa \in Kard$ und $\kappa^+ = \min\{\mu \in Kard : \kappa < \mu\}$, so gilt für alle $\alpha \in On$:
a) $|\alpha| < \kappa \Rightarrow \alpha < \kappa$,
b) $|\alpha| > \kappa \Rightarrow \alpha \geq \kappa^+$,
c) $|\alpha| = \kappa \Rightarrow \kappa \leq \alpha < \kappa^+$.
Beweis :
a) $|\alpha| < \kappa \Rightarrow \neg(\kappa \preceq \alpha) \Rightarrow \alpha < \kappa$.
b) $|\alpha| > \kappa \Rightarrow \alpha \geq |\alpha| \geq \kappa^+$.
c) folgt aus $|\alpha| \leq \alpha$, sowie b) mit κ^+ an Stelle von κ. △

Definition
a heißt *endlich* $:\Leftrightarrow |a| < \omega$ (d.h. $\exists k \in \omega(a \sim k)$)
a heißt *D-endlich* $:\Leftrightarrow \neg\exists f(f : a \to a$ injektiv und $f[a] \neq a)$.

Bemerkung: Ist a unendlich, so gilt nicht notwendigerweise $\omega \leq |a|$, denn $|a|$ muß keine Ordinalzahl sein.

Lemma 9.7
a) $b \preceq a$ & a endlich $\Rightarrow$ b endlich
b) $a \subseteq \omega \Rightarrow (a$ endlich $\Leftrightarrow \exists x \in \omega(a \subseteq x))$
c) ω ist die kleinste unendliche Kardinalzahl.
d) a D-unendlich $\Leftrightarrow \omega \preceq a$
e) a endlich $\Rightarrow$ a D-endlich
f) $\omega \subseteq Kard$
g) (AC) $\Rightarrow$ (a D-endlich $\Leftrightarrow$ a endlich)
Beweis :
a) folgt aus 9.5 d).
b)"$\Rightarrow$" Induktion nach $|a|$. "$\Leftarrow$" folgt aus a).
c)*Annahme*: ω endlich. Nach b) gilt dann $\omega \subseteq k$ für ein $k \in \omega$; also $k \in k \in \omega$. *Widerspruch.*
ω ist also unendlich, und folglich gilt $\neg\exists\alpha \in \omega(\alpha \sim \omega)$, d.h. $\omega \in Kard$.
d) "$\Rightarrow$" Sei $f : a \to a$ injektiv mit $f[a] \neq a$. Wir wählen ein $x_0 \in a \setminus f[a]$ und definieren $g : \omega \to a,\ g(0) := x_0,\ g(n') := f(g(n))$. Durch vollständige Induktion zeigt man nun $\forall n \in \omega \forall i \in n(g(n) \neq g(i))$, d.h. g injektiv.
"$\Leftarrow$" Sei $g : \omega \to a$ injektiv. Dann ist $f := \{(g(i), g(i')) : i \in \omega\} \cup \{(x, x) : x \in a \setminus g[\omega]\}$ eine injektive Funktion von a in a mit $g(0) \notin f[a]$, also a D-unendlich.
e) Ist a D-unendlich, so gilt nach d) $\omega \preceq a$, woraus mit c) und a) folgt, daß a unendlich ist.
f) Sei $n \in \omega,\ m \leq n$ und $f : n \to m$ injektiv. Zu zeigen: $m = n$. Nach e) ist n D-endlich. Wegen $f[n] \subseteq m \subseteq n$ gilt deshalb $n = f[n] \subseteq m$ und somit $m = n$.
g) "$\Rightarrow$" Wir zeigen: "a unendlich $\Rightarrow$ a D-unendlich".
Sei h eine Auswahlfunktion für $\mathrm{Pot}(a)$ mit $\emptyset \in \mathrm{dom}(h)$. Durch Rekursion über ω definieren wir $g : \omega \to V$,

$g(n) := h(a \setminus g[n])$. Nach 9.5e gilt $\forall n \in \omega(g[n]$ endlich$)$. Da a nach Annahme unendlich ist, folgt nun durch vollständige Induktion $\forall n \in \omega(a \setminus g[n] \neq \emptyset)$. Folglich ist g eine injektive Funktion von ω in a, und nach d) ist a D-unendlich. $\triangle$

Lemma 9.8
$\omega \leq \kappa \in Kard \;\Rightarrow\; \kappa \in Lim.$
Beweis :
Sei $\omega \leq \beta + 1$. Definition: $f : \beta + 1 \to \beta,\; f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = \beta \\ x' & \text{falls } x \in \omega \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$
Offenbar ist f injektiv, und somit $\beta + 1$ keine Kardinalzahl. $\triangle$

Definition $\alpha^+ := \{\xi \in On : \xi \preceq \alpha\}$

Satz 9.9 $\alpha^+ = \min\{\kappa \in Kard : \alpha < \kappa\}$.
Beweis :
Sei $W := \{(b, r) : b \subseteq \alpha \wedge r$ ist Wohlordnung auf $b\}$. Offenbar $W \subseteq \mathrm{Pot}(\alpha) \times \mathrm{Pot}(\alpha \times \alpha)$ und deshalb $W \in V$.
Definition: $\mathbf{ot} : W \to On,\; \mathbf{ot}((b, r)) :=$ der Ordnungstyp von (b, r) (siehe Satz 8.7).
Dann gilt offenbar $\alpha^+ = \{\mathbf{ot}(x) : x \in W\}$ und daher $\alpha^+ \in V$. Da $\alpha^+ \subseteq On$ transitiv ist, folgt $\alpha^+ \in On$.
Weiter gilt $\alpha^+ \not\preceq \alpha$ und $\forall \xi \in \alpha^+(\xi \preceq \alpha)$, also $\forall \xi \in \alpha^+(\alpha^+ \not\preceq \xi)$, d.h. $\alpha^+ \in Kard$. Wegen $\alpha \preceq \alpha$ gilt $\alpha < \alpha^+$.
Ist $\alpha < \kappa \in Kard$, so $\forall \xi \geq \kappa(\xi \not\preceq \alpha)$ und deshalb $\forall \xi < \alpha^+(\xi < \kappa)$, d.h. $\alpha^+ \leq \kappa$. $\triangle$

Definition
Nach 9.9 ist $Kard \setminus \omega$ unbeschränkt in On, also keine Menge.
$\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ $(\alpha \in On)$ sei die Ordnungsfunktion der Klasse $Kard \setminus \omega$.
(Insbesondere gilt also $\aleph_0 = \omega$.)

Lemma 9.10
Die Klasse $Kard$ ist abgeschlossen, d.h. es gilt $\forall u(u \subseteq Kard \;\Rightarrow\; \sup(u) \in Kard)$.
Beweis :
Sei $\gamma := \sup(u)$ und $f : \gamma \to \alpha$ injektiv. Dann $\forall \xi \in u(\xi \preceq \alpha)$. Wegen $u \subseteq Kard$ folgt daraus $\forall \xi \in u(\xi \leq \alpha)$ und weiter $\gamma = \sup(u) \leq \alpha$. $\triangle$

Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen

Definition einer Relation $<^*$ auf $On \times On$

$(\alpha_0, \beta_0) <^* (\alpha_1, \beta_1) \;:\Leftrightarrow\; \alpha_0 \cup \beta_0 < \alpha_1 \cup \beta_1 \vee (\alpha_0 \cup \beta_0 = a_1 \cup \beta_1 \wedge [\alpha_0 < \alpha_1 \vee (\alpha_0 = \alpha_1 \wedge \beta_0 < \beta_1)])$

Lemma 9.11
$<^*$ ist eine Wohlordnung auf $On \times On$.
Beweis : klar.

Definition
$\Gamma : On \times On \to On$ sei der eindeutig bestimmte Isomorphismus von $(On \times On, <^*)$ auf $(On, <)$.
Anders gesagt, Γ ist die Umkehrung der Ordnungsfunktion von $(On \times On, <^*)$.

Satz 9.12 $\Gamma[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] = \aleph_\alpha$ für alle $\alpha \in On$.

Beweis durch Induktion nach α:
Wie man leicht sieht, gilt für alle β:
(1) $\Gamma[\beta \times \beta] \in On$,
(2) $\Gamma[\beta \times \beta] = \bigcup_{\xi < \beta} \Gamma[\xi \times \xi]$, falls $\beta \in Lim$,
(3) $\xi < \beta \;\Rightarrow\; \Gamma[\xi \times \xi] < \Gamma[\beta \times \beta]$,
(4) $\beta \leq \Gamma[\beta \times \beta]$.
Somit haben wir $\aleph_\alpha \leq \Gamma[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] = \bigcup_{\beta < \aleph_\alpha} \Gamma[\beta \times \beta]$, und es bleibt zu zeigen $\forall \beta < \aleph_\alpha(\Gamma[\beta \times \beta] < \aleph_\alpha)$.
Fall 1: $\beta < \aleph_0$: Durch Induktion nach n zeigt man $\forall m, n \in \omega(m \times n$ endlich $)$. Also ist $\beta \times \beta$ und somit auch $\Gamma[\beta \times \beta]$ endlich. Es folgt $\Gamma[\beta \times \beta] < \aleph_0 \leq \aleph_\alpha$.
Fall 2: $\aleph_0 \leq \beta < \aleph_\alpha$: Dann $|\beta| = \aleph_\xi$ mit $\xi < \alpha$. Mit I.V. folgt $\aleph_\xi = \Gamma[\aleph_\xi \times \aleph_\xi] \sim \Gamma[\beta \times \beta]$, also $\Gamma[\beta \times \beta] < \aleph_\alpha$. $\triangle$

Korollar $0 < |b| \le |a| = \aleph_\alpha \;\Rightarrow\; |a \cup b| = |a \times b| = \aleph_\alpha$.

Beweis : $\aleph_\alpha \preceq a \cup b \preceq a \times \{0,1\} \preceq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$ und $\aleph_\alpha \preceq a \times b \preceq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$.

Definition
Für $\kappa, \mu \in Kard$ sei $\kappa \hat{+} \mu := |(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \mu)|$ und $\kappa \hat{\cdot} \mu := |\kappa \times \mu|$.

Satz 9.13
a) $\kappa, \mu \in Kard \setminus \{0\}$ & $\omega \le \kappa \cup \mu \;\Rightarrow\; \kappa \hat{+} \mu = \kappa \hat{\cdot} \mu = \kappa \cup \mu$,
b) $\kappa \hat{+} 0 = \kappa$ & $\kappa \hat{\cdot} 0 = 0$,
c) $m, n \in \omega \;\Rightarrow\; m \hat{+} n \in \omega$ & $m \hat{+} (n') = (m \hat{+} n)'$,
d) $m, n \in \omega \;\Rightarrow\; m \hat{\cdot} n \in \omega$ & $m \hat{\cdot} (n') = (m \hat{\cdot} n) \hat{+} m$.
Beweis :
a) folgt sofort aus dem obigen Korollar. b) ist trivial.
c) Induktion nach n. Induktionsschritt: Nach I.V. sowie nach Definition von $\hat{+}$ gilt $(\{0\} \times m) \cup (\{1\} \times n) \sim m \hat{+} n \in \omega$. Daraus folgt $(\{0\} \times m) \cup (\{1\} \times n') = (\{0\} \times m) \cup (\{1\} \times n) \cup \{(1,n)\} \sim (m \hat{+} n) \cup \{m \hat{+} n\} = (m \hat{+} n)' \in \omega$.
d) Induktion nach n. Induktionsschritt: Nach I.V. sowie nach Definition von $\hat{\cdot}$ gilt $m \times n \sim m \hat{\cdot} n \in \omega$. Mit c) folgt daraus $m \times (n') = (m \times n) \cup (m \times \{n\}) \sim (\{0\} \times (m \hat{\cdot} n)) \cup (\{1\} \times m) \sim (m \hat{\cdot} n) \hat{+} m \in \omega$. △

Satz 9.14 (AC)
$\mathrm{Fkt}(F)$ & $c \subseteq \mathrm{dom}(F) \;\Rightarrow\; |\bigcup_{x \in c} F(x)| \le |c| \hat{\cdot} \sup\{|F(x)| : x \in c\}$.
Korollar
$\mathrm{Fkt}(F)$ & $c \subseteq \mathrm{dom}(F)$ & $|c| \le \aleph_\alpha$ & $\forall x \in c (|F(x)| \le \aleph_\alpha) \;\Rightarrow\; |\bigcup_{x \in c} F(x)| \le \aleph_\alpha$.
Beweis :
O.E.d.A.: $c = |c|$. Sei $\kappa := \sup\{|F(x)| : x \in c\}$. Wegen (AC) gibt es eine Funktion $g : c \to V$ mit $g(x) : F(x) \to \kappa$ injektiv, für jedes $x \in c$.
Sei $h : \bigcup F[c] \to c \times \kappa$, $h(y) := (\xi, g(\xi)(y))$, wobei $\xi := \min\{x \in c : y \in F(x)\}$.
Offenbar ist h injektiv, und somit gilt $\bigcup F[c] \preceq c \times \kappa$. △
Notation: $\alpha + 1 := \alpha'$.

Definition
Eine Ordinalzahl α heißt *regulär*, falls gilt
$\alpha \in Lim \wedge \forall f (\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) \in \alpha \wedge \mathrm{ran}(f) \subseteq \alpha \;\Rightarrow\; \sup(\mathrm{ran}(f)) \in \alpha)$.

Bemerkungen
(1) Eine Limeszahl α ist genau dann regulär, wenn gilt $\forall u \subseteq \alpha (|u| < \alpha \Rightarrow \sup(u) < \alpha)$.
(2) α regulär $\Rightarrow$ $\alpha \in Kard$.
(3) ω ist regulär.
Beweis:
(1) "$\Rightarrow$": Gelte $u \subseteq \alpha$ & $\gamma := |u| < \alpha$, und sei $f : \gamma \to u$ bijektiv. Dann ist $\sup(u) = \sup(\mathrm{ran}(f)) < \alpha$.
"$\Leftarrow$": Sei $\gamma := \mathrm{dom}(f) \in \alpha$ und $u := \mathrm{ran}(f) \subseteq \alpha$.
Dann gilt $|u| \le |\gamma| < \alpha$ und folglich $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \sup(u) < \alpha$.
(2) Sei α regulär und $\alpha \notin Kard$. Dann $|\alpha| < \alpha \in Lim$ und folglich nach (1) $\alpha = \sup(\alpha) < \alpha$. *Widerspruch.*
(3) folgt aus 9.7b und (1).

Satz 9.15 (AC)
$\aleph_{\alpha+1}$ ist regulär.
Beweis :
Sei $\gamma < \aleph_{\alpha+1}$ und $f : \gamma \to \aleph_{\alpha+1}$. Dann gilt $|\gamma| \le \aleph_\alpha$ & $\forall x \in \gamma (|f(x)| \le \aleph_\alpha)$, woraus mit 9.14 folgt $|\sup(\mathrm{ran}(f))| = |\bigcup_{x \in \gamma} f(x)| \le \aleph_\alpha$, also $\sup(\mathrm{ran}(f)) < \aleph_{\alpha+1}$. △

Satz 9.16
$|c| \in Kard$ & $\delta \in On$ & $\mathrm{Fkt}(f)$ & $\mathrm{Fkt}(h)$ & $\forall x \in c (h(x) : f(x) \to \delta$ injektiv$) \;\Rightarrow\; |\bigcup_{x \in c} f(x)| \le |c| \hat{\cdot} |\delta|$.
Beweis :
O.E.d.A. $c \in On$. Definition: $H : \bigcup_{x \in c} f(x) \to c \times \delta$, $H(y) := (\xi, h(\xi)(y))$ mit $\xi := \min\{x \in c : y \in f(x)\}$.
Offenbar ist H injektiv, woraus die Behauptung folgt. △

Korollar
$|a| \leq \aleph_\alpha \;\Rightarrow\; |a^{<\omega}| \leq \aleph_\alpha$, wobei $a^{<\omega} := \{s : \mathrm{Fkt}(s) \wedge \mathrm{dom}(s) \in \omega \wedge \mathrm{ran}(s) \subseteq a\}$.
Beweis :
O.E.d.A.: $0 \in a \subseteq \aleph_\alpha$. Sei $f : \omega \to V,\ f(n) := a^n := \{s \in a^{<\omega} : \mathrm{dom}(s) = n\}$, und
$h : \omega \to V,\ h(0) := \{\langle 0, 0\rangle\},\ h(n+1) := a^{n+1} \to \aleph_\alpha,\ s \mapsto \Gamma(h(n)(s|n), s(n))$.
Mit 9.16 folgt nun $|a^{<\omega}| = |\bigcup_{x\in\omega} f(x)| \leq \omega\hat{\cdot}\aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. △