MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra II” : Lösungen zu Blatt 9

Aufgabe 33

$P_A = (-1-t)(t^2+1) = -(t+1)(t-i)(t+i)$

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = i$: $\begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -i$: $\begin{pmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

$S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}$

Nebenrechnung: $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle = (0 \;\; 1 \;\; -i) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1 + (-i)(-i) = 1 + i^2 = 0$

Gäbe es ein $S \in \mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, so wäre $P_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Widerspruch.

Aufgabe 34

Sei $(v_1, ..., v_n)$ Basis aus EV und $\lambda_j \in \mathbb{R}$ mit $f(v_j) = \lambda_j v_j$.

(a) $\lambda_j^2 \langle v_j, v_j \rangle = \langle f^2(v_j), v_j \rangle = \langle f^2(v), w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

(b) Sei $f^k = 0$. Dann $0 = f^k(v_j) = \lambda_j^k v_j$, also $\lambda_k = 0$ und somit $\lambda_j = 0$.

$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0 \Rightarrow f = 0$.

(c) "$\Rightarrow$": $\langle f(g(v)), w \rangle = \langle v, f(g(w)) \rangle = \langle f(v), g(w) \rangle = \langle g(f(v)), w \rangle$

"$\Leftarrow$": $\langle f(g(v)), w \rangle = \langle g(v), f(w) \rangle = \langle v, g(f(w)) \rangle = \langle v, f(g(w)) \rangle$.

Aufgabe 35

"$\Rightarrow$": Ist σ pos. def., so gibt es eine ONB $\tilde{v}$ von (V, σ). Die zugehörige Matrix $\mathcal{M}_{\tilde{v}}(\sigma)$ ist die Einheitsmatrix.

"$\Leftarrow$": Sei $\tilde{v}$ eine Basis von V, so daß $A := \mathcal{M}_{\tilde{v}}(\sigma)$ nur positive Eigenwerte hat. Nach 13.1b gilt $\overline{A}^{\mathtt{t}} = A$.

Nach 13.11 gibt es eine unitäre Matrix S, so daß $\overline{S}^{\mathtt{t}} AS = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) =: S$, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind, also $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$. Mit $C := (c_{ij})_{i,j} := \overline{S}$ folgt $C^{\mathtt{t}} A\overline{C} = D$.

Sei $w_j := \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i$. Nach 13.2 ist dann $\mathcal{M}_{\tilde{w}}(\sigma) = C^{\mathtt{t}} \mathcal{M}_{\tilde{v}}(\sigma)\overline{C} = D$, und folglich σ positiv definit, denn $\sigma(\sum_i x_i w_i, \sum_i x_i w_i) = \sum_i \lambda_i x_i^2$. $[[\sigma(\sum_i x_i w_i, \sum_i x_i w_i) = \sum_{i,j} x_i x_j \sigma(w_i, w_j) = \sum_{i,j} x_i x_j \lambda_i \delta_{ij} = \sum_i x_i^2 \lambda_i]]$

Aufgabe 36

(a) Wir zeigen $\|f(v_1)\| = \|f(v_2)\|$.

$\langle v_1 + v_2, v_1 - v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$
$\langle f(v_1) + f(v_2), f(v_1) - f(v_2) \rangle = \langle f(v_1 + v_2), f(v_1 - v_2) \rangle = 0 \Rightarrow$
$\langle \frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2)), \frac{1}{2}(f(v_1) - f(v_2)) \rangle = 0$ [12.3a]$\Rightarrow$
$\|f(v_1)\|^2 = \|\frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2))\|^2 + \|\frac{1}{2}(f(v_1) - f(v_2))\|^2$.
Aus Symmetriegründen gilt auch $\|f(v_2)\|^2 = \|\frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2))\|^2 + \|\frac{1}{2}(f(v_2) - f(v_1))\|^2$.

(b) Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB und $\lambda := \|f(v_1)\|^{-1}$.
Dann ist $((\lambda f)(v_1), ..., (\lambda f)(v_n))$ ebenfalls eine ONB und somit (nach 14.2) λf orthogonal.

[1. $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(v_i), f(v_j) \rangle = 0 \Rightarrow \langle (\lambda f)(v_i), (\lambda f)(v_j) \rangle = 0$.
2. $\langle (\lambda f)(v_i), (\lambda f)(v_i) \rangle = \lambda^2 \|f(v_i)\|^2 = 1$.]