MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra II” : Lösungen zu Blatt 8

Aufgabe 29

(a) $0 = \sigma(v+w, v+w) = \sigma(v,v) + 2\sigma(v,w) + \sigma(w,w) = 2\sigma(v,w) \;\Rightarrow\; \sigma(v,w) = 0$.

(b) 1. $u \in \mathbb{R}v \cap W \;\Rightarrow\; \exists\alpha \in \mathbb{R}(u = \alpha v \;\&\; \sigma(v,u) = 0) \;\Rightarrow\; \exists\alpha(u = \alpha v \;\&\; \alpha\sigma(v,v) = 0) \Rightarrow u = 0$.

2. Sei $u \in V$. Gesucht $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $u - \lambda v \in W$, d.h. $\sigma(v, u - \lambda v) = 0$. Lösung: $\lambda := \frac{\sigma(v,u)}{\sigma(v,v)}$.

(c) Induktion nach $n := \dim V$. 1. $n = 1$: trivial.
2. $n > 1$: 2.1. $\forall v, w(\sigma(v,w) = 0)$: trivial.
2.2. sonst: Nach (a) existiert ein v_1 mit $\sigma(v_1, v_1) \neq 0$. Sei $W := \{w \in V : \sigma(v_1, w) = 0\}$. Nach (b) gilt $V = \mathbb{R}v_1 \oplus W$. Somit $\dim W = n-1$ und nach I.V. besitzt W eine Basis $(v_2, ..., v_n)$ mit $\sigma(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j \in \{2, ..., n\}$. Dann ist $(v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Basis von V mit $\sigma(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j \in \{1, ..., n\}$.

Aufgabe 30

(a) Sei $f := \mathsf{f}_A$. Nach Voraussetzung und 13.6d ist $-A = \overline{A}^{\mathsf{t}}$ die darstellende Matrix von f^{ad} bzgl. der kanonischen Basis. Also $f^{\mathsf{ad}} = -f$ und somit $f \circ f^{\mathsf{ad}} = f^{\mathsf{ad}} \circ f$.

Sei λ ein Eigenwert von f, d.h. $f(v) = \lambda v$ für ein $v \neq 0$.
Es folgt $\lambda\langle v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, -f(v)\rangle = \langle v, -\lambda v\rangle = -\overline{\lambda}\langle v, v\rangle$ und somit $-\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. λ rein imaginär.

(b) $Spur(A\overline{A}^{\mathsf{t}}) = \sum_i \sum_\nu a_{i\nu}\overline{a_{i\nu}} = \sum_{i,\nu} |a_{i\nu}|^2$.

Im folgenden sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, und es sei $f \in \mathsf{End}(V)$.

Aufgabe 31

(a) $v \in (f^{\mathsf{ad}}(U^\perp))^\perp \Leftrightarrow \forall y \in f^{\mathsf{ad}}(U^\perp)(\langle v, y\rangle = 0) \Leftrightarrow \forall w \in U^\perp(\langle v, f^{\mathsf{ad}}(w)\rangle = 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall w \in U^\perp(\langle f(v), w\rangle = 0) \Leftrightarrow f(v) \in U^{\perp\perp} \Leftrightarrow f(v) \in U \Leftrightarrow v \in f^{-1}(U)$.

(b) f normal $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^{\mathsf{ad}}) \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker}(f)^\perp = \mathrm{Ker}(f^{\mathsf{ad}})^\perp$.
Vorl. $\Rightarrow$ $(\mathrm{Im} f)^\perp = \mathrm{Ker}(f^{\mathsf{ad}}) \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp\perp} = \mathrm{Ker}(f^{\mathsf{ad}})^\perp$. Ebenso: $\mathrm{Im}(f^{\mathsf{ad}}) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$.

(b) $f \circ g = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} (f \circ g)^{\mathsf{ad}} = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} g^{\mathsf{ad}} \circ f^{\mathsf{ad}} = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} g \circ f = 0$.

(1) $h = 0 \;\Rightarrow\; \forall v, w(\langle h(v), w\rangle = 0 = \langle v, 0\rangle) \;\Rightarrow\; h^{\mathsf{ad}} = 0$.

(2) $\forall v, w(\langle f(g(v)), w\rangle = \langle g(v), f^{\mathsf{ad}}(w)\rangle = \langle v, g^{\mathsf{ad}}(f^{\mathsf{ad}}(w))\rangle) \;\Rightarrow\; (f \circ g)^{\mathsf{ad}} = g^{\mathsf{ad}} \circ f^{\mathsf{ad}}$.

(3) f normal $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^{\mathsf{ad}})$ und [nach (b)] $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^{\mathsf{ad}})$.

$g^{\mathsf{ad}} \circ f^{\mathsf{ad}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f^{\mathsf{ad}}) \subseteq \mathrm{Ker}(g^{\mathsf{ad}}) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g) \;\Leftrightarrow\; g \circ f = 0$.

Aufgabe 32

(a) Wegen $f^2 = f$ gilt $\forall v \in V(v - f(v) \in \mathrm{Ker}(f))$. Mit $\mathrm{Im}(f) \perp \mathrm{Ker}(f)$ folgt daraus für alle $v, w \in V$:
$\langle f(v), w\rangle = \langle f(v), f(w) + (w - f(w))\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle f(v) + (v - f(v)), f(w)\rangle = \langle v, f(w)\rangle$. Also $f^{\mathsf{ad}} = f$.

(b) $f(x) = \lambda x \;\&\; f(y) = \mu y \;\Rightarrow\; f^{\mathsf{ad}}(y) \overset{\text{f normal}}{=} \overline{\mu}y \;\Rightarrow$
$\lambda\langle x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^{\mathsf{ad}}(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle \;\Rightarrow\; (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle x, y\rangle = 0$