MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 25

(a) Das Schmidtsche Verfahren angewandt auf $(\varepsilon_1 v_1, ..., \varepsilon_n v_n)$ liefere die ONB $(u_1, ..., u_n)$.
Wir zeigen $u_k = \varepsilon_k w_k$ durch Induktion nach k:
1. $u_1 = \|\varepsilon_1 v_1\|^{-1}\varepsilon_1 v_1 = \varepsilon_1\|v_1\|^{-1}v_1 = \varepsilon_1 w_1$.
2. $u'_k = \varepsilon_k v_k - \sum_{i<k}\langle \varepsilon_k v_k, u_i\rangle u_i \overset{\text{IH}}{=} \varepsilon_k(v_k - \sum_{i<k}\langle v_k, \varepsilon_i w_i\rangle \varepsilon_i w_i) = \varepsilon_k(v_k - \sum_{i<k}\langle v_k, w_i\rangle |\varepsilon_i|^2 w_i) = \varepsilon_k w'_k$.
$u_k = \|u'_k\|^{-1}u'_k = \|\varepsilon_k w'_k\|^{-1}\varepsilon_k w'_k = \varepsilon_k\|w'_k\|^{-1}w'_k = \varepsilon_k w_k$.

(b) Beweis durch Induktion nach k:
1. $k = 1$: trivial. 2. $k > 1$: $w'_k = v_k - \sum_{i<k}\langle v_k, w_i\rangle w_i \overset{(*)}{=} v_k$ und deshalb $w_k = \|v_k\|^{-1}v_k$.
$(*)$ Nach I.V. ist, für $1 \le i < k$, $w_i = \|v_i\|^{-1}v_i$ und deshalb $\langle v_k, w_i\rangle = 0$.

Aufgabe 26

(a) Grassmann: Sei $v := b \times c$ und $w := a \times v$.
$w_1 = a_2v_3 - a_3v_2 = a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(-(b_1c_3 - b_3c_1)) =$
$(a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_3b_3 + a_2b_2)c_1 = \langle a, c\rangle b_1 - \langle a, b\rangle c_1$.
Ebenso zeigt man $w_i = \langle a, c\rangle b_i - \langle a, b\rangle c_i$ für $i = 2, 3$.

Jacobi: $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c + \langle b, a\rangle c - \langle b, c\rangle a + \langle c, b\rangle a - \langle c, a\rangle b = 0$

(c) Sei $u := a \times b$, $v := b \times c$, $w := c \times a$.
1. Seien a, b, c lin.abh.; o.E. $c = \alpha a + \beta b$. Dann $b \times c = \alpha(b \times a)$ und $c \times a = \beta(b \times a)$.
2. Seien u, v, w lin.abh. Dann o.E. $w = \alpha u + \beta v0$. Ist $w = 0$, so a, c lin.abh. Sei jetzt $w \ne 0$.
$\langle b, u\rangle = 0$ & $\langle b, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle b, w\rangle = 0 \Rightarrow b \in w^\perp$. Ausserdem $a, c \in w^\perp$.
Also $\dim\operatorname{span}(a, b, c) \le \dim(w^\perp) \overset{w\neq o}{=} 2$ und somit (a, b, c) lin.abh.

Aufgabe 27

Hilfssatz: (x, y) lin.unabh. und $z = x \times y \Rightarrow \{x, y\}^\perp = \mathbb{R}z$ und $\operatorname{span}(x, y) = z^\perp$.
Beweis: $0 \ne z \in \operatorname{span}(x, y)^\perp$ & $\dim\operatorname{span}(x, y) = 2 \Rightarrow \{x, y\}^\perp = \operatorname{span}(x, y)^\perp = \mathbb{R}z \Rightarrow \operatorname{span}(x, y) = z^\perp$.

1. Nach Lemma 8.2b gilt $E \cap E' = a + W_1 \cap W_2$.
2. Wegen "E, E' nicht parallel" ist $W \ne W'$, also $\dim(W + W') = 3$ und somit $\dim(W \cap W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W + W') = 4 - 3 = 1$. Aus *Hilfssatz* folgt $v^\perp = W$ und $(v')^\perp = W'$, also $w \in W \cap W'$. Wegen $W \ne W'$ ist (v, v') lin. unabhängig; folglich $w \ne 0$ und somit $W \cap W' = \mathbb{R}w$.

Aufgabe 28

(a) Sei $A = (a_{ij})$ mit $f(v_j) = \sum_i a_{ij}v_i$ $(j = 1, ..., n)$.
Sei $\tilde{u}$ eine ONB von V und sei $B = (b_{ik})$ mit $v_i = \sum_k b_{ki}u_k$ $(i = 1, ..., n)$.
Dann $f(v_j) = \sum_i a_{ij}\sum_k b_{ki}u_k = \sum_k(\sum_i b_{ki}a_{ij})u_k$, also $\det_{\tilde{u}}(f(v_1), ..., f(v_n)) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$ und somit $vol(f(v_1), ..., f(v_m)) = |\det_{\tilde{u}}(f(v_1), ..., f(v_n))| = |\det(A)|\cdot|\det(B)| = |\det(f)| \cdot vol(v_1, ..., v_n)$.

(b) Induktion nach n: 1. $vol(v_1) = \|v_1\|$.

2. Sei $1 < n$: Sei $U := \operatorname{span}(v_1, ..., v_{n-1})$ und $v_n' := v_n - \mathsf{pr}_U(v_n)$. Dann $vol(v_1, ..., v_n) \overset{12.18c}{=}$

$= vol(v_1, ..., v_{n-1}) \cdot \|v_n'\| \overset{12.8a}{\leq} vol(v_1, ..., v_{n-1}) \cdot \|v_n\| \overset{\text{I.V.}}{\leq} \|v_1\| \cdot \ldots \cdot \|v_{n-1}\| \cdot \|v_n\|$.

(c) Wir konstruieren ein OGS $(w_1, ..., w_n)$, so daß
$\varphi(w_1, ..., w_n) = \varphi(v_1, ..., v_n)$ und $vol(w_1, ..., w_n) = vol(v_1, ..., v_n)$.

Dann $\varphi(v_1, ..., v_n) = \|w_1\| \cdot \ldots \cdot \|w_n\| \overset{12.17b}{=} vol(v_1, ..., v_n)$.

$w_1 := v_1$, $w_k := v_k - \mathsf{pr}_{U_k}(v_k)$, wobei $U_k := \operatorname{span}(w_1, ..., w_{k-1})$.

Beh.: $\varphi(w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n) = \varphi(w_1, ..., w_k, v_{k+1}, ..., v_n)$.

Bew.: Es ist $w_k = v_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i w_i$ und deshalb
$\varphi(w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n) = \varphi(w_1, ..., w_{k-1}, v_k + \lambda_1 w_1, v_{k+1} ..., v_n) =$
$= \varphi(w_1, ..., w_{k-1}, v_k + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, v_{k+1} ..., v_n) = \ldots = \varphi(w_1, ..., w_{k-1}, w_k, v_{k+1} ..., v_n)$.

Daraus folgt $\varphi(v_1, ..., v_n) = \varphi(w_1, ..., w_n)$.

Ebenso erhält man $vol(v_1, ..., v_n) = vol(w_1, ..., w_n)$.