MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17

(a) $v \neq 0 \;\&\; f(v) = \lambda v \;\&\; f^m = 0 \;\Rightarrow\; v \neq 0 \;\&\; 0 = f^m(v) = \lambda^m v \;\Rightarrow\; \lambda^m = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0.$

(b) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann $P_A = (1-t)^3(-t)$ und somit hat 1 die alg.Vielfachheit 3.

Eig$(A;1)$: $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{rang}(A-E) = 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{dimEig}(A;1) = 2.$

(c) Nach Voraussetzung und L.11.6 existieren $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ und $S \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ mit $A = S^{-1} Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) S$.
Wir setzen $\alpha_i := \sqrt{\lambda_i}$ und $B := S^{-1} \cdot Diag(\alpha_1, ..., \alpha_n) \cdot S$.
Dann $B^2 = S^{-1} Diag(\alpha_1, ..., \alpha_n) S \cdot S^{-1} Diag(\alpha_1, ..., \alpha_n) S = S^{-1} Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) S = A$.

Aufgabe 18

(a) $\det(A - t{\cdot}E) = (3-t)^2(-1-t). \qquad A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$

$\mathrm{rang}(A-3E) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = 0 \\ 2 & \text{falls } \alpha \neq 0 \end{cases}, \; \dim(Eig(A;3)) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \alpha = 0 \\ 1 & \text{falls } \alpha \neq 0 \end{cases}$

Somit: A diagonalisierbar $\iff \alpha = 0$.

Sei jetzt $\alpha = 0$. Eigenvektoren:

$A + E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \beta \\ 0 & 4 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $v_1 := \begin{pmatrix} -\beta \\ -\gamma \\ 4 \end{pmatrix}$. $A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$: $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S := (v_1\; v_2\; v_3) = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ -\gamma & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 & 1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)\det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-t & 0 \end{pmatrix} =$

$= (1-t)(-t(1-t)+1) + (1-t) = (1-t)(t^2 - t + 2)$. Sei $\lambda_1 := 1$.

Nullstellen von $t^2 - t + 2$: $\lambda_2 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-7})$, $\lambda_3 := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-7})$

Somit A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$: A hat drei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ist also diagonalisierbar.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 1$: $A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda := \lambda_{2/3}$: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$. Für $v := \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt $(A - \lambda E) \cdot v =$

$= \begin{pmatrix} -\lambda(\lambda-1) - 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda^2 - \lambda + 2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit $S := \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 - 1 & \lambda_3 - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Es gilt $U := (\mathrm{id} + f)(V) \subseteq \mathrm{Eig}(f;1)$ und $W := (\mathrm{id} - f)(V) \subseteq \mathrm{Eig}(f;-1)$,
denn $f(v + f(v)) = f(v) + f^2(v) = f(v) + v$ und $f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = -(v - f(v))$.

Ferner $V = U + W$, denn: $v = \frac{1}{2}((v + f(v)) + (v - f(v))$.

Somit $V = \mathrm{Eig}(f;1) \oplus \mathrm{Eig}(f;-1)$ und deshalb f diagonalisierbar.

Aufgabe 19

1. U Untervektorraum von V: Seien $A, B \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $Av = \alpha v$ & $Bv = \beta v$. Daraus folgt $(A + \lambda B)v = Av + \lambda Bv = \alpha v + \lambda \beta v = (\alpha + \lambda\beta)v$ und somit $A + \lambda B \in U$. Ferner $0 \in U$.

2. Wegen $A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} + \ldots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + \ldots + a_{nn} \end{pmatrix}$ gilt: v EV von A zum EW $\lambda \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda \; (i = 1, ..., n)$.

Also $U = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \exists \lambda \forall i \in \{1, ..., n\}(\sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda)\}$.

Sei $E_{ij} := (\delta_{\mu i}\delta_{\nu j})_{\mu,\nu} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. (Es gilt: $\delta_{\mu i}\delta_{\nu j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu = i \;\&\; \nu = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.)

Sei $C := E_{1n} + \ldots + E_{nn}$ und $E'_{ij} := E_{ij} - E_{in}$.

Dann gilt für alle λ, a_{ij}:

(2) $\lambda C + \sum_{(i,j) \in J} a_{ij} E'_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda E_{in} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} E_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} E_{in} =$
$= \sum_{i=1}^n (\lambda - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}) E_{in} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} E_{ij}$.

Behauptung: $\mathcal{B} := \{E'_{ij} : (i,j) \in J\}$, wobei $J := \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n-1\}$, ist eine Basis von U.

Beweis:

1. $\mathcal{B} \subseteq U$: $C \cdot v = \sum_{i=1}^n E_{in} \cdot \sum_{j=1}^n e_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n E_{in} \cdot e_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{jn} e_i = \sum_{i=1}^n e_i = v$.

Für $(i,j) \in J$ gilt: $E'_{ij} v = (E_{ij} - E_{in})v = 0$.

2. $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig:

$\lambda C + \sum_{(i,j) \in J} a_{ij} E'_{ij} = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^n (\lambda - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}) E_{in} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} E_{ij} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n\}(\lambda - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} = 0) \;\&\; \forall (i,j) \in J(a_{ij} = 0) \Rightarrow \lambda = 0 \;\&\; \forall (i,j) \in J(a_{ij} = 0)$.

3. $U \subseteq \mathrm{span}(\mathcal{B})$: Sei $A = (a_{ij}) \in U$ und $\lambda := \sum_{j=1}^n a_{1j}$. Dann $\lambda = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ für $i = 1, ..., n$ und somit

$\lambda C + \sum_{(i,j) \in J} a_{ij} E'_{ij} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n (\lambda - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}) E_{in} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{in} E_{in} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} E_{ij} = A$.

Aufgabe 20

(a) $\|u - \frac{1}{2}(v + w)\| = \frac{1}{2}\|v - w\| \Leftrightarrow \|2u - v - w\| = \|v - w\| \Leftrightarrow \|(v - u) + (w - u)\| = \|(v - u) - (w - u)\| \Leftrightarrow$
$\|(v - u) + (w - u)\|^2 = \|(v - u) - (w - u)\|^2 \Leftrightarrow$
$\|v - u\|^2 + \|w - u\|^2 + 2\langle v - u, w - u\rangle = \|v - u\|^2 + \|w - u\|^2 - 2\langle v - u, w - u\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle v - u, w - u\rangle = 0$.

(b) $\sigma(x+y,x+y)+\sigma(x-y,x-y)=\sigma(x,x)+2\sigma(x,y)+\sigma(y,y)+\sigma(x,x)-2\sigma(x,y)+\sigma(y,y)$.

(c) 1. $|\cdot|$ ist eine Norm: 1.1. $|x|=0 \Leftrightarrow |x_i|=0$ für $i=1,...,n \quad \Leftrightarrow \quad x=0$. 1.2. $|\lambda x|=\max_i|\lambda x_i|=\max(|\lambda|\cdot|x_i|)=|\lambda|\cdot\max_i|x_i|$. 1.3. $|x+y|=\max_i(|x_i+y_i|)\leq\max(|x_i|+|y_i|)\leq\max_i|x_i|+\max_i|y_i|$.

2. Sei $x:=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $y:=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Dann $|x+y|^2+|x-y|^2=|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}|^2+|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}|^2=4+1=5$ und $2|x|^2+2|y|^2=2+2=4$. Somit erfüllt $|\cdot|$ nicht die Parallelogrammgleichung. Nach (b) gibt es also kein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^n$ mit $|x|=\sqrt{\sigma(x,x)}$.