MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 13

$(f + f^2)(v) = -v \;\Rightarrow\; f(v) + f^2(v) = f(v + f(v)) = -v \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; f^2(v) = -(v + f(v)) \;\Rightarrow\; f^3(v) = -f(v + f(v)) = -(-v) = v.$

Aufgabe 14

(a) $f(g(v)) = \lambda v \;\&\; \lambda \neq 0 \;\&\; v \neq 0 \;\Rightarrow\; g(f(g(v))) = \lambda g(v) \;\&\; g(v) \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda$ EW von $g \circ f$.

(b) 0 EW von $f \circ g \;\Leftrightarrow\; \det(f{\circ}g - 0{\cdot}\mathrm{id}_V) = 0 \;\Leftrightarrow\; \det(f{\circ}g) = 0 \;\Leftrightarrow\; \det(f) \cdot \det(g) = 0.$
Ebenso: 0 EW von $g \circ f \;\Leftrightarrow\; \det(g) \cdot \det(f) = 0.$

(c) Sei $\lambda \neq 0$. Wie unter (a) bewiesen gilt dann $\forall v (0 \neq v \in \mathrm{Eig}(f{\circ}g; \lambda) \Rightarrow 0 \neq g(v) \in \mathrm{Eig}(g{\circ}f; \lambda))$.

g bildet also $\mathrm{Eig}(f{\circ}g; \lambda)$ injektiv in $\mathrm{Eig}(g{\circ}f; \lambda)$ ab; folglich $\dim\mathrm{Eig}(f{\circ}g; \lambda) \leq \dim\mathrm{Eig}(g{\circ}f; \lambda)$. Aus Symmetriegründen gilt sogar $\dim\mathrm{Eig}(f{\circ}g; \lambda) = \dim\mathrm{Eig}(g{\circ}f; \lambda)$ und $g{\restriction}\mathrm{Eig}(f{\circ}g; \lambda)$ ist Isomorphismus.

Aufgabe 15

(a) $\det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0.$ Folglich ist 1 ein Eigenwert von A.

(b) $\det \begin{pmatrix} 3-t & -2 & 4 \\ 0 & 1-t & 3 \\ 1 & -1 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-t & 4 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3-t & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$
$= (1-t)(t^2 - 6t + 9 - 4) - 3(t - 3 + 2) = (1-t)(t^2 - 6t + 8) = (1-t)(2-t)(4-t).$

Aufgabe 16

(a) $f(v)=\lambda v$ & $f^n = f$ & $v \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda v = f(v) = f^n(v) = \lambda^n v$ & $v \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda - \lambda^n = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \lambda = 0$ oder $1-\lambda^{n-1} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda \in \begin{cases} \{0,1\} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \{0,1,-1\} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) Es ist $f = \mathsf{f}_A$ mit $A := \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte: $\det(A-tE) = \det\begin{pmatrix} -t&0&1&0&0&0\\ 1&-t&0&0&0&0\\ 0&0&-t&1&0&0\\ 0&1&0&-t&0&0\\ 0&0&0&0&-t&1\\ 0&0&0&0&1&-t \end{pmatrix} =$

$-t\cdot\det\begin{pmatrix} -t&0&0&0&0\\ 0&-t&1&0&0\\ 1&0&-t&0&0\\ 0&0&0&-t&1\\ 0&0&0&1&-t \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&-t&1&0&0\\ 1&0&-t&0&0\\ 0&0&0&-t&1\\ 0&0&0&1&-t \end{pmatrix} =$

$t^2\cdot\det\begin{pmatrix} -t&1&0&0\\ 0&-t&0&0\\ 0&0&-t&1\\ 0&0&1&-t \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -t&1&0&0\\ 0&0&-t&1\\ 0&0&1&-t \end{pmatrix} = -t^3\cdot\det\begin{pmatrix} -t&0&0\\ 0&-t&1\\ 0&1&-t \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-t&1\\ 0&1&-t \end{pmatrix}$

$= t^4(t^2-1)-(t^2-1) = (t^4-1)(t^2-1) = (t-1)^2(t+1)^2(t^2+1)$. Somit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Eigenräume:

$\lambda = 1$: $A-E \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1&-1&0&0&0&0\\ 0&1&0&-1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$; $\lambda=-1$: $A+E \overset{\text{EZU}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Eig}(A;1) = \{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_6 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \;\&\; x_2 = x_4 \;\&\; x_3 = x_4 \;\&\; x_5 = x_6\} = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}),$

$\mathrm{Eig}(A;-1) = \{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_6 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 \;\&\; x_2 = -x_4 \;\&\; x_3 = -x_4 \;\&\; x_5 = -x_6\} = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1\\-1\\-1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\-1\\1 \end{pmatrix}).$

[Andere Darstellung von f: $f(\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_3\\x_1\\x_4\\x_2\\x_6\\x_5 \end{pmatrix}$.]