MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9

(a) $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsring und ein euklischer Ring mit $\mathsf{d} : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto |x|$.

(b) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$ ist ein Integritätsring und ein euklischer Ring mit $\mathsf{d} : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 1$.

(c) $R^* = \{1, 3, 7, 9\}$. Es handelt sich nicht um einen Integritätsring (da z.B. $2 \cdot_R 5 = 0$), also nicht um einen euklidischen Ring.

(d) $(\mathbb{R}^{n\times n})^* = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$. Es handelt sich für $n \geq 2$ nicht um einen Integritätsring, da nicht kommutativ.

Für $n = 1$ gilt $R = \mathbb{R}$ und das ist, wie jeder Körper, ein Integritätsring und mit $\mathsf{d}(x) := 1$ auch ein eukl. Ring.

Aufgabe 10

(a) $c, d \in \mathrm{ggT}(a, b) \;\Rightarrow\; c|d \;\&\; d|c \;\Rightarrow\; d = cx \;\&\; c = dy \;\Rightarrow\; d = dyx \;\Rightarrow\; 1 = yx \;\Rightarrow\; y \in R^*$.

(b) Reicht zu zeigen: $gT(a_0, \ldots, a_n, b) = gT(a, b)$. Wegen $a \in \mathrm{ggT}(a_0, ..., a_n)$ gilt $(d \in gT(a_0, ..., a_n) \Leftrightarrow d|a)$. Es folgt: $d \in gT(a_0, \ldots, a_n, b) \Leftrightarrow d|a \;\&\; d|b \Leftrightarrow d \in gT(a, b)$.

(c) $d|b \;\&\; d|r \;\&\; a = qb + r \;\Rightarrow\; d|a$. $\quad d|a \;\&\; d|b \;\&\; r = a - qb \;\Rightarrow\; d|r$.

(d) Aus der Voraussetzung folgt mit (c): $gT(a_0, a_1) = gT(a_1, a_2) = \ldots = gT(a_{n+1}, a_{n+2}) \overset{a_{n+2}=0}{=} gT(a_{n+1})$ und somit $\mathrm{ggT}(a_0, a_1) = \mathrm{ggT}(a_{n+1}) \ni a_{n+1}$.

(e) "$\Leftarrow$": $d \in gT(\vec{a}) \;\&\; d = \sum_{i=0}^{n} x_i a_i \;\Rightarrow\; d \in gT(\vec{a}) \;\&\; \forall b \in gT(\vec{a})(b|d) \;\Rightarrow\; d \in \mathrm{ggT}(\vec{a})$.

"$\Rightarrow$": Nach Satz 10.2 existiert ein $b \in R$ mit $(b) = (a_0, \ldots, a_n)$. Sei $d \in \mathrm{ggT}(a_0, ..., a_n)$. Aus $(b) = (a_0, ..., a_n)$ folgt $a_i \in (b)$ $(i = 0, ..., n)$, also $b \in gT(a_0, ..., a_n)$ und somit $b|d$. Aus $b|d$, d.h. $d \in (b)$.

Aufgabe 11

(a) Da der Polynomring euklidisch ist, können wir nach Satz 10.2 o.E. $n = 1$ annehmen. Dann gilt für $\lambda \in K$ und zwei beliebige Elemente $f_1 \cdot g$, $f_1 \cdot h \in (f_1)$: $\lambda(f_1 \cdot g) + f_1 \cdot h = (\lambda g + h) f_1 \in (f_1)$.

Also handelt es sich um einen Untervektorraum.

(b) Gesucht $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $f_1, f_2, f_3 \in (f)$ (d.h. $f|f_i$ für $i = 1, 2, 3$) und $f \in (f_1, f_2, f_3)$.

Es gilt $f_1 = (t-1)(t+1)$, $f_2 = (t-1)^2$, $f_3 = 2t(t-1)$. Sei deshalb $f := t - 1$. Dann $f|f_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und $f_1 - f_2 = -1 + 2t - 1 = 2(t-1) = 2f$, also $f = \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2 \in (f_1, f_2, f_3)$.

(c) $(f_1, f_2, f_3) = (f) = \{h \cdot (t-1) : h \in \mathbb{R}[t]\}$. Deshalb ist z.B. $(t^i(t-1))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis von (f_1, f_2, f_3).

[Lineare Unabhängigkeit: $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i t^i (t-1) = 0 \;\Rightarrow\; (t-1) \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i t^i = 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i t^i = 0 \overset{\text{L. 10.5}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0.$]

(d) $(t^6 + 3t^4 + t^3 - 2) : (t^2 - 2t + 1) = t^4 + 2t^3 + 6t^2 + 11t + 16$ Rest $21t - 18$, denn

$(t^4 + 2t^3 + 6t^2 + 11t + 16) \cdot (t^2 - 2t + 1) + 21t - 18 =$
$t^6 + 2t^5 + 6t^4 + 11t^3 + 16t^2 - 2t^5 - 4t^4 - 12t^3 - 22t^2 - 32t + t^4 + 2t^3 + 6t^2 + 11t + 16 + 21t - 18 =$
$t^6 + 3t^4 + t^3 - 2$ und $\mathrm{grad}(21t - 18) < \mathrm{grad}(t^2 - 2t + 1)$.

Aufgabe 12

(a) $F_0(f) := t \cdot f$.

F_0 injektiv, denn $(t \cdot f = 0 \Rightarrow f = 0)$. F_0 nicht surjektiv, denn $t \cdot f \neq 1$ für alle $f \in \mathbb{R}[t]$.

(b) $F_1(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i) := \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} t^i$.

F_1 surjektiv, denn $\sum_{i=0}^{n} a_i t^i = F_1(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{i+1})$. F_1 nicht injektiv, denn $F_1(1) = 0$.

(c) Etwa $U := \operatorname{span}(t, t^3, t^5, \ldots)$ und $W := \operatorname{span}(t^0, t^2, t^4, \ldots)$.

$F : U \to \mathbb{R}[t]$, $\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i+1} \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ und $G : W \to \mathbb{R}[t]$, $\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i} \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ sind Isomorphismen und $\mathbb{R}[t] = U \oplus W$.