MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 5

(a) σ hat 10 Fehlstände: (1,2),(1,3),(1,4),(1,5), (2,3),(2,4),(2,5), (3,4),(3,5), (4,5). Also $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$.

ρ hat 5 Fehlstaende: (1,3), (2,3), (4,7), (5,7), (6,7). Also $\mathrm{sign}(\rho) = -1$.

$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ hat 7 Fehlstände: (1,2),(1,3),(1,4),(1,5), (3,4),(3,5), (4,5).
Also $\mathrm{sign}(\tau) = -1$ und $\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = -1$.

(b) Kurzschreibweise für Permutationen: $(a_1\ a_2\ \dots\ a_n) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

$(4\ 1\ 2\ 5\ 6\ 3) = \langle 3,6\rangle \circ (4\ 1\ 2\ 5\ 3\ 6) = \langle 3,6\rangle \circ \langle 5,3\rangle \circ (4\ 1\ 2\ 3\ 5\ 6) = \langle 3,6\rangle \circ \langle 3,5\rangle \circ \langle 3,4\rangle \circ (3\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6) =$
$\langle 3,6\rangle \circ \langle 3,5\rangle \circ \langle 3,4\rangle \circ \langle 2,3\rangle \circ (2\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6) = \langle 3,6\rangle \circ \langle 3,5\rangle \circ \langle 3,4\rangle \circ \langle 2,3\rangle \circ \langle 1,2\rangle$.

(c) (i) Sei $\sigma := \langle a_1, ..., a_k\rangle$ und $\tau := \langle a_k, ..., a_l\rangle$. Dann gilt:
$\sigma\tau(a_i) = \sigma(a_i) = a_{i+1}$ für $1 \le i < k$
$\sigma\tau(a_i) = \sigma(a_{i+1}) = a_{i+1}$ für $k \le i < l$
$\sigma\tau(a_l) = \sigma(a_k) = a_1$,
$\sigma\tau(x) = \sigma(x) = x$ für $x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$. Folglich $\sigma \circ \tau = \langle a_1, \dots, a_l\rangle$.

(ii) Aus (i) folgt $\langle a_1, ..., a_k\rangle = \langle a_1, a_2\rangle \circ \langle a_2, a_3\rangle \circ \dots \circ \langle a_{k-1}, a_k\rangle$ und somit $\mathrm{sign}(\langle a_1, ..., a_k\rangle) = (-1)^{k-1}$.

Aufgabe 6

(a) $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1}{\to} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2(4 - (-4)) = -16.$

$B \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & 12 \\ 0 & 12 & 8 & 12 \\ 0 & 12 & 12 & 8 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 12 \\ 12 & 12 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 12 & 12 \\ 0 & -10 & -6 \\ 0 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 8 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 12 \\ 12 & 12 & 8 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 8 & 12 & 12 \\ 0 & -10 & -6 \\ 0 & -6 & -10 \end{pmatrix} = -8(100 - 36) = -512.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

$\det(C_n) = (-1)^{n-1}n.$

(b) $\det(B) = \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) b_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\pi(n)} = \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)(-1)^{1+\pi(1)} a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot (-1)^{n+\pi(n)} a_{n\pi(n)} =$
$= \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)(-1)^{1+\pi(1)+\ldots+n+\pi(n)} a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)} = \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)(-1)^{2(1+\ldots+n)} a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)} = \det(A).$

Aufgabe 7

Entwicklung nach der letzten Zeile ergibt:

$\det(A_n) = \beta_n \cdot \det(A_{n-1}) - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A_{n-2} & 0 \\ * & -1 \end{pmatrix} = \beta_n \cdot \det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2})$

Z.B. im Fall $n = 5$:

$$\det \begin{pmatrix} \beta_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \beta_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_5 \end{pmatrix} = \beta_5 \cdot \det(A_4) - \det \begin{pmatrix} \beta_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta_2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \beta_5 \cdot \det(A_4) + \det \begin{pmatrix} \beta_1 & -1 & 0 \\ 1 & \beta_2 & -1 \\ 0 & 1 & \beta_3 \end{pmatrix} = \beta_5 \cdot \det(A_4) + \det(A_3).$$

Anderer Beweis: Da alle anderen Summanden den Faktor Null enthalten, gilt

$\det(A_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)} =$
$\sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1\pi(n-1)} \cdot \beta_n +$
$\sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n-1, \pi(n-1)=n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n-2\pi(n-2)} \cdot (-1) \cdot 1 =$
$\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1\sigma(n-1)} \cdot \beta_n + \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n-2\pi(n-2)} =$
$\beta_n \cdot \det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2}).$

Aufgabe 8

Sei $B \in R^{n \times n}$ fest und $d : R^{n \times n} \to R$, $d(A) := \sum_{i=1}^n \det(a_1, ..., a_{i-1}, Ba_i, a_{i+1}, ..., a_n)$.

1. d ist multilinear, da $A \mapsto \det(A)$ multilinear bzgl. der Spalten von A ist.

2. d alternierend: Sei z.B. $a_1 = a_2$. Dann $d(A) = \det(Ba_1, a_1, a_3, ..., a_n) + \det(a_1, Ba_1, a_3, ..., a_n) = 0$.

Somit gilt:
$d(A) \overset{9.5c}{=} d(E_n) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \sum_{i=1}^n \det(e_1, ..., e_{i-1}, Be_i, e_{i+1}, ..., e_n) = \det(A) \cdot \sum_{i=1}^n b_{ii} = \det(A) \cdot \operatorname{tr}(B).$