MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 11

Aufgabe 41

(a) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{pmatrix}$. Nach Voraussetzung ist $\det(A) = \prod_{i<j\le m}(x_j - x_i) \neq 0$.

Es gibt also (genau) ein $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit $A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

d.h. $a_0 + x_i a_1 + x_i^2 a_2 + \ldots + x_i^m a_m = b_i$ für $i = 0, \ldots, m$. Sei also $p := \sum_{i=0}^m a_i t^i$.

(b) *Spezialfall:* $A = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Nach Voraussetzung sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschieden (denn wäre z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$, so wäre $\dim(\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)) \geq 2$).

$BA = AB = (\sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{ik} b_{kj})_{i,j}$ & $BA = (\sum_{k=1}^n b_{ik}\lambda_k\delta_{kj})_{i,j} \;\Rightarrow\; \lambda_i b_{ij} = b_{ij}\lambda_j \;(\forall i,j) \;\Rightarrow\; b_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Nach (a) gibt es $p = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i t^i \in K[t]$, so daß $p(\lambda_j) = b_{jj}$ für $j = 1, \ldots, n$. Es folgt $p(A) = \sum_i c_i A^i =$
$= \sum_i c_i Diag(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i) = Diag(\sum_i c_i \lambda_1^i, \ldots, \sum_i c_i \lambda_n^i) = Diag(p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)) = B$.

Allgemeiner Fall: Nach Voraussetzung existieren $S \in \mathrm{GL}(n;K)$ und paarweise verschiedene $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so daß $A = S^{-1}DS$ mit $D := Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

$AB = BA \;\Rightarrow\; DSBS^{-1} = SBS^{-1}D \overset{\text{Spezialfall}}{\Rightarrow}$ es gibt ein $p \in K[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) \leq n-1$ und $SBS^{-1} = p(D)$.

$\Rightarrow\; B = S^{-1}p(D)S = S^{-1} \cdot (\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i D^i) \cdot S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i S^{-1} D^i S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i A^i = p(A)$.

Aufgabe 42

$P_A = (-2-t)[(1-t)(7-t)+2] - 2[(7-t)-6] - 7[-1-3(1-t)] =$
$-(2+t)(9-8t+t^2) - 2(1-t) + 7 + 21(1-t) =$
$-t^3 + 8t^2 - 9t - 2t^2 + 16t - 18 - 2 + 2t + 7 + 21 - 21t =$
$-t^3 + 6t^2 - 12t + 8 = (2-t)^3$.

Nach Satz 15.3 ist also A trigonalisierbar.

Bestimmung eines Eigenvektors v_1 von f_A zum Eigenwert 2:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} : \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ergänze zu Basis $\tilde{u} := (v_1, e_2, e_3)$. Sei $W := \mathrm{span}(e_2, e_3)$.

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1 + e_3,\; Ae_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 3v_1 - 4e_2 + 4e_3, \quad \mathcal{M}_{\tilde{u}}(\mathsf{f}_A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sei $h \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}v_1)$ mit $h(e_2) = v_1$, $h(e_3) := 3v_1$; und $g \in \mathsf{End}(W)$ mit $g(e_2) = e_3$, $g(e_3) = -4e_2 + 4e_3$.

Dann $\forall w \in W(\mathsf{f}_A(w) = h(w) + g(w))$ und $\mathcal{M}_{(e_2,e_3)}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Bestimmung eines Eigenvektors v_2 von g zum Eigenwert 2:

$g(xe_2 + ye_3) = 2xe_2 + 2ye_3 \;\Leftrightarrow\; -4ye_2 + (x + 4y)e_3 = 2xe_2 + 2ye_3 \;\Leftrightarrow\; x = -2y.$

Sei $v_2 := -2e_2 + e_3$. Dann ist (v_2, e_3) Basis von W und $\tilde{v} := (v_1, v_2, e_3)$ Basis von V.

Ferner: $\mathcal{M}_{\tilde{v}}(\mathsf{f}_A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, denn $\begin{cases} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = h(v_2) + g(v_2) = v_1 + 2v_2 \\ f(e_3) = h(e_3) + g(e_3) = 3v_1 + (-4e_2 + 4e_3) = 3v_1 + 2v_2 + 2e_3 \end{cases}$.

Nach Vorlesung gilt $\mathcal{M}_{\tilde{v}}(\mathsf{f}_A) = S^{-1}AS$ mit $S := (v_1\ v_2\ e_3)$.

Aufgabe 43

(a) Induktion nach k: 1. $k = 1$: trivial.
2. $k > 1$: Sei $v_1 + ... + v_k \in U$. Dann auch $\lambda_k v_1 + ... + \lambda_k v_k \in U$ & $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = f(v_1 + ... + v_k) \in U$. Daraus folgt $(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} \in U$ und weiter (nach I.V.) $(\lambda_k - \lambda_i)v_i \in U$ für $i = 1, ..., k-1$. Wegen $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ ist also $v_i \in U$ für $i = 1, ..., k-1$. Mit $v_1 + ... + v_k \in U$ folgt daraus auch $v_k \in U$.

(b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte von f (ohne Wiederholungen) und sei $V_i := \mathrm{Eig}(f; \lambda_i)$ $(i = 1, ..., k)$. Nach Voraussetzung ist $V = V_1 + \ldots + V_k$. Mit (a) folgt daraus $U \subseteq (U \cap V_1) + \ldots + (U \cap V_k)$. Wegen $\mathrm{Eig}(f|U; \lambda_i) = U \cap V_i$ (klar) folgt weiter $U = \mathrm{Eig}(f|U; \lambda_1) + \ldots + \mathrm{Eig}(f|U; \lambda_k)$, d.h. $f|U$ diagonalisierbar.

Aufgabe 44

Sei $p = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i t^i$ und $q = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i t^i$. Ferner $c_k := \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

1. $p(r) \otimes q(r) = (\sum\limits_{i=0}^{m} a_i \odot r^i) \otimes (\sum\limits_{i=0}^{n} b_i \odot r^i) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (a_i \odot r^i) \otimes (b_j \odot r^j) \overset{(*)}{=} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (a_i b_j) \odot r^{i+j} =$

$= \sum\limits_{k=0}^{m+n} \sum\limits_{i+j=k} (a_i b_j) \odot r^k = \sum\limits_{k=0}^{m+n} (\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j) \odot r^k = \sum\limits_{k=0}^{m+n} c_k \odot r^k = (p \cdot q)(r).$

$(*)$ $(a_i \odot r^i) \otimes (b_j \odot r^j) = (a_i \odot r^i) \otimes (b_j \odot r^j) = a_i \odot (r^i \otimes (b_j \odot r^j)) = a_i \odot (b_j \odot (r^i \otimes r^j)) = (a_i b_j) \odot r^{i+j}$

2. $(\lambda \cdot p)(r) = (\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i t^i)(r) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) \odot r^i = \lambda \odot \sum_{i=0}^{n} r^i = \lambda \odot p(r)$