MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 10

Aufgabe 37

(1) $k \neq j \;\Rightarrow\; \forall i(a_{ij}a_{ik} = 0)$. [Beweis: $k \neq j \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ik} = 0 \;\Rightarrow\; \forall i(a_{ij}a_{ik} = 0)$.]

Wegen $\forall j(\sum_i a_{ij}^2 = 1)$ existiert zu jedem j ein i mit $a_{ij} > 0$.

Def.: Sei $\pi(j)$ minimal, so dass $a_{\pi(j)j} > 0$.

(2) $j \neq k \;\Rightarrow\; \pi(j) \neq \pi(k)$. [Beweis: $j \neq k$ & $a_{\pi(j)j} > 0$ & $a_{\pi(k)k} > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \pi(j) \neq \pi(k)$.]

(3) $a_{ij} = \delta_{i,\pi(j)}$

Beweis:

1. $i \neq \pi(j)$. Dann $i = \pi(k)$ für ein $k \neq j$. Wegen $a_{\pi(k)k} > 0$ und (1) folgt daraus $a_{ij} = 0$.
2. $i = \pi(j)$. Aus $\sum_\nu a_{\nu j}^2 = 1$ und $a_{\nu j} = 0$ für alle $\nu \neq \pi(j)$ folgt $a_{\pi(j)j}^2 = 1$ und somit $a_{\pi(j)j} = 1$.

Aufgabe 38

(i)⇒(ii): $\forall u \in U, w \in W(\langle u,w\rangle = \langle f(u),w\rangle = \langle u,f(w)\rangle = \langle u,0\rangle = 0) \;\Rightarrow\; W \perp U \overset{12.6a}{\Rightarrow} W = U^\perp$.

(ii)⇒(i): Für alle $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$ gilt:
$\langle f(u+w), u'+w'\rangle = \langle u, u'+w'\rangle = \langle u,u'\rangle = \langle u+w, u'\rangle = \langle u+w, f(u'+w')\rangle$.

(ii)⇒(iii): $u \in U$ & $w \in W \;\Rightarrow\; u \perp w \;\Rightarrow\; \|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \;\Rightarrow\; \|f(u+w)\| = \|u\| \le \|u+w\|$.

(iii)⇒(ii): Annahme: $W \neq U^\perp$. Nach 12.6a gibt es dann $u \in U$ und $w \in W$ mit $\langle u,w\rangle \neq 0$.

O.E.d.A. $\langle u,w\rangle > 0$. Sei $v_\lambda := -u+\lambda w$. Dann $\|v_\lambda\|^2 = \langle -u+\lambda w, -u+\lambda w\rangle = \langle u,u\rangle + \lambda^2\langle w,w\rangle - 2\lambda\langle u,w\rangle = \|f(v_\lambda)\|^2 + \lambda(\lambda\|w\|^2 - 2\langle u,w\rangle)$, also $\|v_\lambda\| < \|f(v_\lambda)\|$ für hinreichend kleines $\lambda > 0$. *Widerspruch.*

Aufgabe 39

(a) "⇐": Sei $\beta = 2\pi - \alpha$. Dann $R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R(\alpha)^{\mathtt{t}}$.

Für $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gilt ferner $D^{-1} \cdot R(\alpha) \cdot D = D \cdot R(\alpha) \cdot D = R(\alpha)^{\mathtt{t}}$.

"⇒": Es ist $P_{R(\alpha)} = (\cos\alpha - t)^2 + \sin^2\alpha = t^2 - 2\cos\alpha \cdot t + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = t^2 - 2\cos\alpha \cdot t + 1$ und ebenso $P_{R(\beta)} = t^2 - 2\cos\beta \cdot t + 1$. $R(\alpha), R(\beta)$ ähnlich $\Rightarrow P_{R(\alpha)} = P_{R(\beta)} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \cos\beta \;\Rightarrow\; \alpha + \beta = 2\pi$.

(b) Es gilt $B := \frac{1}{3}A \in O(3)$ und $\det(B) = 1$.

Nach 14.5 existiert eine ONB $\tilde{v}$ von $\mathbb{R}^3$ und ein α mit $0 \le \alpha < 2\pi$, so daß $\mathcal{M}_{\tilde{v}}(\mathsf{f}_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\alpha) \end{pmatrix}$.

Dabei muß v_1 ein Eigenvektor (von B) zum Eigenwert 1 sein. Anders gesagt, es muß gelten $(B - E_3)v_1 = 0$, d.h. $(A - 3E_3)v_1 = 0$. Bestimmung von v_1: $A - 3E_3 =$

$$= \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ -3 & \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{6} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} v_1'$, wobei $v_1' := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ergänzung zu ONB: $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sei $S := (v_1\ v_2\ v_3)$. Dann $\mathcal{M}_{\tilde{v}}(\mathsf{f}_A) = S^{\mathtt{t}} A S = S^{\mathtt{t}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\sqrt{3} \\ 3 & -3\sqrt{2} & 0 \\ -3\sqrt{2} & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 + 3{\cdot}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & -3{\cdot}2 - 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40

Da die Matrizen A, B ähnlich sind, haben sie dasselbe charakteristische Polynom $P \in \mathbb{C}[t]$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt P in Linearfaktoren, d.h. $P = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$. Wegen $A, B \in U(n)$ gibt es Orthonormalbasen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ von $\mathbb{C}^n$ mit $Av_i = \lambda_i v_i$ und $Bw_i = \lambda_i w_i$ für $i = 1, \ldots, n$ (siehe 14.6, 14.2, 14.3 und Beweis von 13.8). Dann $S_0 := (v_1\ \ldots\ v_n) \in U(n)$, $S_1 := (w_1\ \ldots\ w_n) \in U(n)$, sowie (nach 11.5b) $S_0^{-1} A S_0 = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = S_1^{-1} B S_1$. Daraus folgt $S := S_0 S_1^{-1} \in U(n)$ und $S^{-1} A S = B$.