MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" : Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $M = a + U$, $M' = a' + U'$ und $M \cup M' = a + W$.

(1) $x, y \in M$ & $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$.
Beweis: Sei $x = a + u_1$, $y = a + u_2$. Dann $\alpha x + \beta y = \alpha a + \alpha u_1 + \beta a + \beta u_2 = a + \alpha u_1 + \beta u_2 \in M$.

(2) $x \in M \setminus M'$ & $y \in M' \setminus M \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) \notin M \cup M'$.
Beweis: Annahme: $z := \frac{1}{2}(x + y) \in M'$. Nach (1) gilt dann $x = -y + 2z \in M'$. Widerspruch.

Annahme: $M \not\subseteq M'$ & $M' \not\subseteq M$, d.h. es gibt $x \in M \setminus M'$ und $y \in M' \setminus M$.
Mit (2) folgt daraus $\frac{1}{2}(x + y) \notin M \cup M'$. Andererseits gilt $x, y \in M \cup M'$.
Mit (1) folgt deshalb, daß $M \cup M'$ kein affiner Unterraum ist. *Widerspruch.*

Aufgabe 2

Nach 8.4 ist $M = v_0 + W$ mit $W := \mathrm{span}(v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0)$. Ferner $\dim(M) = \dim(W)$.

Fall 1: $0 \in M$. Dann $v_0 \in W$. Wir zeigen $W = U$:
$v_0 \in W \Rightarrow v_0, v_1, ..., v_k \in W \Rightarrow U \subseteq W$. $\quad v_0, \ldots, v_k \in U \Rightarrow v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \in U \Rightarrow W \subseteq U$.

Fall 2: $0 \notin M$. Dann $v_0 \notin W$ und somit $v_0 \neq 0$ & $K \cdot v_0 \cap W = \{0\}$.
Wegen $U = K \cdot v_0 + W$ folgt daraus $\dim(U) = \dim(W) + 1$.

Aufgabe 3

(i) $\pi(x + y) = (\pi_1(x + y), \pi_2(x + y)) = (\pi_1(x) + \pi_1(y), \pi_2(x) + \pi_2(y)) = (\pi_1(x), \pi_2(x)) + (\pi_1(y), \pi_2(y)) = \pi(x) + \pi(y)$. $\quad \pi(\lambda x) = (\pi_1(\lambda x), \pi_2(\lambda x)) = (\lambda\pi_1(x), \lambda\pi_2(x)) = \lambda(\pi_1(x), \pi_2(x)) = \lambda\pi(x)$.

(ii) $\pi(x) = (U_1, U_2) \Leftrightarrow \pi_1(x) = U_1$ & $\pi_2(x) = U_2 \Leftrightarrow x \in U_1$ & $x \in U_2 \Leftrightarrow x \in U_1 \cap U_2$.
Also $\mathrm{Ker}(\pi) = U_1 \cap U_2$.

(iii) I. Sei π surjektiv und $y \in V$. Dann existiert $x \in V$ mit $\pi(x) = (y + U_1, 0 + U_2)$, d.h. $x + U_1 = y + U_1$ & $x + U_2 = 0 + U_2$, d.h. $y - x \in U_1$ & $x \in U_2$, also $y = (y - x) + x \in U_1 + U_2$.
II. Sei $V = U_1 + U_2$ und $y_1, y_2 \in V$. z.z. $(*)$ $\exists x \in V(\pi(x) = (y_1 + U_1, y_2 + U_2))$.
$y_2 - y_1 \in V = U_1 + U_2 \overset{8.2a}{\Rightarrow} (y_1 + U_1) \cap (y_2 + U_2) \neq \emptyset \Rightarrow \exists u_1 \in U_1, u_2 \in U_2(x := y_1 + u_1 = y_2 + u_2) \Rightarrow (*)$.

Aufgabe 4

Korollar zu 8.10: $f \in \mathrm{Hom}(V, W) \Rightarrow V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$.

(a) (i) $x \in \mathrm{Ker}(\rho) \Leftrightarrow x \in U$ & $\rho(x) = U' \Leftrightarrow x \in U$ & $x + U' = U' \Leftrightarrow x \in U$ & $x \in U'$.

(ii) $\rho \in \mathrm{Hom}(U, (U{+}U')/U') \overset{\text{(i)+Kor}}{\Rightarrow} U/(U \cap U') = U/\mathrm{Ker}(\rho) \cong \mathrm{Im}(\rho) = (U + U')/U'$.

(b) (i) f wohldefiniert: $x + U = y + U \Rightarrow x - y \in U \Rightarrow x - y \in U' \Rightarrow x + U' = y + U'$.
f linear: $f((x + U) + (y + U)) = f(x + y + U) = x + y + U' = (x + U') + (y + U') = f(x + U) + f(y + U)$.

$\mathrm{Ker}(f) = U'/U$: $x + U \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x + U) = U' \Leftrightarrow x + U' = U' \Leftrightarrow x \in U' \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x + U \in U'/U$.
$(*)$ $x + U \in U'/U \Rightarrow x + U = x' + U$ für ein $x' \in U' \Rightarrow x = (x - x') + x' \in U'$.

(ii) $f \in \mathrm{Hom}(V/U, V/U') \overset{\text{(i)+Kor}}{\Rightarrow} (V/U)/(U'/U) = (V/U)/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f) = V/U'$.