MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 33

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Man finde eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, so daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist, und bestimme die Diagonalelemente.

Wieso gibt es keine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix ist?

Aufgabe 34

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und seien $f, g \in \mathsf{End}(V)$.

Man zeige:

(a) f selbstadjungiert und orthogonal $\Longrightarrow f^2 = \mathrm{id}$.

(b) f selbstadjungiert und $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow f = 0$.

(c) f, g selbstadjungiert $\Longrightarrow$ ($f \circ g$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ $f \circ g = g \circ f$).

Aufgabe 35

Sei σ eine symmetrische Bilinearform bzw. Hermitesche Form auf dem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Man beweise die folgende Äquivalenz:

σ positiv definit $\iff$ es gibt eine Basis $\tilde{v}$ von V, so daß die Matrix $\mathcal{M}_{\tilde{v}}(\sigma)$ nur positive Eigenwerte hat.

Aufgabe 36

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f \in \mathsf{End}(V)$ injektiv.
Ferner gelte $\forall v, w \in V(\langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(v), f(w)\rangle = 0)$.

Man beweise:

(a) Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V, so $\|f(v_1)\| = \dots = \|f(v_n)\|$.

[Hinweis: Zum Beweis von $\|f(v_1)\| = \|f(v_2)\|$ betrachte man die Dreiecke
$0, f(v_1), w$ und $0, f(v_2), w$, wobei $w := \frac{1}{2}(f(v_1)+f(v_2))$.]

(b) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß der Endomorphismus λf orthogonal ist.

Abgabetermin: Montag, 28. 6. 2010, 12hct im Übungskasten.