MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 29

Sei σ eine symmetrische Bilinearform auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V.
Man beweise:

(a) $\forall v \in V(\sigma(v,v)=0) \implies \forall v,w \in V(\sigma(v,w)=0)$.

(b) $v \in V$ & $\sigma(v,v) \neq 0$ & $W = \{w \in V : \sigma(v,w)=0\} \implies V = \mathbb{R}v \oplus W$.

(c) Es gibt eine Basis $\tilde{v}$ von V, so daß die darstellende Matrix von σ bzgl. $\tilde{v}$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis zu (c): Induktion nach $\dim(V)$.

Aufgabe 30

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beweise man:

(a) Gilt $\overline{A}^{\mathtt{t}} = -A$, so ist der Endomorphismus $\mathsf{f}_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ v \mapsto A{\cdot}v$ normal und alle Eigenwerte von f_A sind rein imaginär, d.h. liegen in $\{i{\cdot}x : x \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\mathit{Spur}(A \cdot \overline{A}^{\mathtt{t}}) = 0 \implies A = 0$. [Definition von *Spur* siehe Aufgabe 22]

Im folgenden sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, und es sei $f \in \mathsf{End}(V)$.

Aufgabe 31

Man beweise:

(a) Für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ gilt $(f^{\mathsf{ad}}(U^\perp))^\perp = f^{-1}(U)$. [Hinweis: $(U^\perp)^\perp = U$]

(b) Ist f normal, so gilt $\mathrm{Im}(f^{\mathsf{ad}}) = \mathrm{Im}(f)$.

(c) Ist g ein weiterer Endomorphismus von V und sind f, g normal, so gilt: $f \circ g = 0 \Leftrightarrow g \circ f = 0$.

Aufgabe 32

Man beweise:

(a) $f = f^2$ & $\mathrm{Im}(f) \perp \mathrm{Ker}(f) \implies f = f^{\mathsf{ad}}$. [Hinweis: 5.12]

(b) Ist f normal und sind v, w Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von f, so gilt $\langle v,w\rangle = 0$.

Abgabetermin: Montag, 21. 6. 2010, 12hct im Übungskasten.