MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 25

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\tilde{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Durch Anwendung des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens gemäß Satz 12.9 erhalte man die ONB $\tilde{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Man zeige:

(a) Sind $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{K}$ mit $|\varepsilon_i| = 1$ $(i = 1, ..., n)$, so erhält man durch Anwendung des Schmidtschen Verfahrens auf $(\varepsilon_1 v_1, \ldots, \varepsilon_n v_n)$ die ONB $(\varepsilon_1 w_1, \ldots, \varepsilon_n w_n)$.

(b) Ist $\tilde{v}$ ein Orthogonalsystem, so gilt $w_k = \|v_k\|^{-1} v_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 26

(a) Zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ die *Grassmann-Identiät* $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle \cdot b - \langle a, b\rangle \cdot c$ und folgern Sie daraus die *Jacobi-Identität* $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

(b) Zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$: (a, b, c) linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $(a \times b, b \times c, c \times a)$ linear unabhängig.

Aufgabe 27

Seien $E = p + W$ und $E' = p' + W'$ mit $W = \mathrm{span}(w_1, w_2)$ und $W' = \mathrm{span}(w_1', w_2')$ zwei nichtparallele Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Sei ferner $a \in E \cap E'$ und $w := v \times v'$ mit $v := w_1 \times w_2$, $v' := w_1' \times w_2'$.

Man beweise: $E \cap E' = a + \mathbb{R}w$.

Aufgabe 28

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Basis $\tilde{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Man zeige:

(a) Für jeden Endomorphismus $f : V \to V$ gilt: $\mathit{vol}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = |\det(f)| \cdot \mathit{vol}(v_1, \ldots, v_n)$.

(b) $\mathit{vol}(v_1, \ldots, v_n) \le \|v_1\| \cdot \ldots \cdot \|v_n\|$.

(c) Ist $\varphi : V^n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften
(i) für jedes OGS $(w_1, \ldots, w_n)$ in V gilt $\varphi(w_1, ..., w_n) = \|w_n\| \cdot \ldots \cdot \|w_n\|$,
(ii) $\forall u_1, ..., u_n \in V \forall i, j \in \{1, ..., n\} \forall \lambda \in \mathbb{R}\big(i \ne j \;\Rightarrow\; \varphi(u_1, ..., u_{i-1}, u_i + \lambda u_j, u_{i+1}, ..., u_n) = \varphi(u_1, ..., u_n)\big)$,
so gilt: $\varphi(v_1, ..., v_n) = \mathit{vol}(v_1, ..., v_n)$.

Abgabetermin: Montag, 14. 6. 2010, 12hct im Übungskasten.