MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 21

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, und sei $(v_1, ..., v_m)$ ein Orthonormalsystem in V. Beweisen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) $(v_1, ..., v_m)$ ist Basis von V.

(ii) $\forall v \in V(\langle v, v_i\rangle = 0$ für $i = 1, ..., m \;\Rightarrow\; v = 0)$

(iii) $\forall v \in V(v = \sum_{i=1}^m \langle v, v_i\rangle v_i)$

(iv) $\forall v, w \in V(\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v, v_i\rangle \cdot \langle v_i, w\rangle)$

(v) $\forall v \in V(\|v\|^2 = \sum_{i=1}^m |\langle v, v_i\rangle|^2)$

Aufgabe 22

V bezeichne den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$. Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in V$ sei $Spur(A) := a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

Man zeige:

(a) Durch $\sigma(A, B) := Spur(A \cdot B)$ wird auf V eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform erklärt.

(b) Für die Untervektorräume $U_+ := \{A \in V : A^{\mathtt{t}} = A\}$ und $U_- := \{A \in V : A^{\mathtt{t}} = -A\}$ gilt:
- (i) $\sigma(A, A) > 0$ für alle $A \in U_+ \setminus \{0\}$, und $\sigma(A, A) < 0$ für alle $A \in U_- \setminus \{0\}$.
- (ii) $V = U_+ \oplus U_-$,
- (iii) $U_+ = U_-^\perp$, wobei $U_-^\perp := \{A \in V : \sigma(A, B) = 0$ für alle $B \in U_-\}$.

Aufgabe 23

(a) Seien $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Es gibt genau zwei Würfel, die sowohl $[a, b]$ $(:= \{a + \lambda(b - a) : 0 \leq \lambda \leq 1\})$ als auch $[a, c]$ als Kanten haben. Von einem dieser beiden Würfel bestimme man die Koordinaten sämtlicher Ecken.

(b) Man zeige:

(i) Ein Parallelogramm hat genau dann gleich lange Seiten, wenn die beiden Diagonalen orthogonal sind.

(ii) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die beiden Diagonalen gleich lang sind.

Aufgabe 24

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 6}$.

Man bestimme einen Isomorphismus $f : \mathbb{R}^4 \to \text{Lös}(A; 0)$, so daß $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^4$.

Abgabetermin: Montag, 7. 6. 2010, 12hct im Übungskasten.