MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 17

(a) Man beweise: Ist $V \neq \{0\}$ ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus, d.h. $f^m = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m} = 0$ für ein $m \geq 1$, so ist 0 der einzige Eigenwert von f.

(b) Man finde einen Endomorphismus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, so daß 1 ein Eigenwert von f mit geometrischer Vielfachheit 2 und algebraischer Vielfachheit 3 ist.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Man zeige:
Sind alle Eigenwerte von A nichtnegativ, so gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$.

Aufgabe 18

(a) Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \beta \\ 0 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie, für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ die Matrix A diagonalisierbar ist. Finden Sie für diese Fälle ein invertierbares S, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(b) Man untersuche die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und bestimme gegebenenfalls ein $S \in \mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ bzw. $S \in \mathrm{GL}(3;\mathbb{C})$ derart, daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(c) Sei V endlichdimensionaler K-Vektorraum, wobei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei $f \in End(V)$ mit $f^2 = \mathrm{id}_V$. Man zeige, daß f diagonalisierbar ist.

Hinweis: Man betrachte die Mengen $\{x + f(x) : x \in V\}$ und $\{x - f(x) : x \in V\}$.

Aufgabe 19

Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen und sei $v := (1, 1, \ldots, 1, 1)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^n$. Sei U die Menge der Matrizen $A \in V$, die v als Eigenvektor haben. Man zeige, daß U ein Untervektorraum von V ist und bestimme eine Basis von U.

Aufgabe 20

(a) Man beweise: $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n(\, \|u - \frac{1}{2}(v + w)\| = \frac{1}{2}\|v - w\| \;\Leftrightarrow\; \langle v - u, w - u\rangle = 0 \,)$ (Satz des Thales)

(b) Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum und $\|x\| := \sqrt{\sigma(x, x)}$.
Man beweise: $\forall x, y \in V(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$ (Parallelogrammgleichung)

(c) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, daß durch $|x| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird, für die kein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R}^n(|x| = \sqrt{\sigma(x, x)})$ existiert.

Abgabetermin: Montag, 31. 5. 2010, 12hct im Übungskasten.