MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 4

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 13

Sei $f : V \to V$ linear und die Abbildung $f + f^2$ (i.e. $f + (f \circ f)$) habe den Eigenwert -1.

Man zeige, daß die Abbildung f^3 (i.e. $f \circ f \circ f$) den Eigenwert 1 hat.

Aufgabe 14

Seien $f, g : V \to V$ linear.

(a) Man zeige, daß $f \circ g$ und $g \circ f$ bis auf evtl. $\lambda = 0$ dieselben Eigenwerte haben.

(b) Sei V endlichdimensional. Man zeige, daß $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Eigenwerte haben.

(c) Sei V endlichdimensional und $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $f \circ g$ und $g \circ f$.

Man zeige, daß die Eigenräume von $f \circ g$ und $g \circ f$ zu λ die gleiche Dimension haben und gebe einen Isomorphismus an.

Aufgabe 15

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Man entscheide, ob 1 ein Eigenwert von A ist.

(b) Man zerlege das Polynom $\det(A - t \cdot E_n) \in \mathbb{R}[t]$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 16

(a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $f^n = f$ für ein $n > 1$.

Welche $\lambda \in \mathbb{R}$ kommen als Eigenwerte von f in Frage?

(b) Sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6)$ definiert durch $f(e_i) := e_{\sigma(i)}$, wobei $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_6$.

Man bestimme alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von f.

Abgabetermin: Montag, 17. 5. 2010, 12hct im Übungskasten.