MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 9

Man bestimme R^* für die folgenden Ringe R und entscheide, ob es sich um Integritätsringe handelt, sowie ob es sich um euklidische Ringe handelt (inklusive eventueller Angabe der Funktion d).

(a) $R = \mathbb{Z}$

(b) $R = \mathbb{Q}$

(c) $R := \{0, ..., 9\}$, wobei $a +_R b$ bzw. $a \cdot_R b$ die letzte Stelle von $a + b \in \mathbb{Z}$ bzw. $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ sei.

(d) $R = \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und -multiplikation.

Aufgabe 10

Sei R ein Integritätsring.

Für $a_0, \ldots, a_n \in R$ sei $\mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) := \{d \in gT(a_0, \ldots, a_n) : \forall x \in gT(a_0, \ldots, a_n)(x|d)\}$.

Jedes $d \in \mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n)$ nennt man einen *größten gemeinsamen Teiler* (kurz ggT) von $a_0, \ldots, a_n$.

Man beweise:

(a) $a_0, \ldots, a_n \in R$ & $c, d \in \mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) \implies \exists e \in R^*(c = d{\cdot}e)$

(b) $a_0, \ldots, a_n, b \in R$ & $a \in \mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) \implies \mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n, b) = \mathrm{ggT}(a, b)$

(c) $a, b, q, r \in R$ mit $a = qb + r \implies gT(a, b) = gT(b, r)$.

(d) $a_0, \ldots, a_{n+2}, q_0, \ldots, q_{n+1} \in R$ & $\forall i \le n(a_i = q_i a_{i+1} + a_{i+2})$ & $a_{n+2} = 0 \implies a_{n+1} \in \mathrm{ggT}(a_0, a_1)$.

(e) Ist R euklidisch, so gilt für alle $a_0, \ldots, a_n, d \in R$:
$d \in \mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) \iff d \in gT(a_0, \ldots, a_n)$ & $d \in (a_0, \ldots, a_n)$

Aufgabe 11

Sei K ein Körper und $K[t]$ der entsprechende Polynomring. Mit der üblichen Addition und der durch $\lambda{\cdot}\sum_{i=0}^n a_i t^i := \sum_{i=0}^n (\lambda a_i) t^i$ definierten Skalarmultiplikation ist $K[t]$ auf natürliche Weise ein K-Vektorraum.

(a) Man beweise: Sind $f_1, \ldots, f_n \in K[t]$, so ist $(f_1, \ldots, f_n)$ ein Untervektorraum von $K[t]$.

(b) Seien $K = \mathbb{R}$, $n = 3$, $f_1 = t^2 - 1$, $f_2 = t^2 - 2t + 1$, $f_3 = 2t^2 - 2t$.
Man finde ein $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $(f) = (f_1, f_2, f_3)$.

(c) Man gebe eine Basis des Untervektorraums (f_1, f_2, f_3) von $\mathbb{R}[t]$ an.

(d) Man dividiere (mit Rest) $t^6 + 3t^4 + t^3 - 2$ durch $t^2 - 2t + 1$.

Aufgabe 12

(a) Man finde eine lineare Abbildung $F_0 : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, so daß F_0 injektiv aber nicht surjektiv ist.

(b) Man finde eine lineare Abbildung $F_1 : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, so daß F_1 surjektiv aber nicht injektiv ist.

(c) Man finde Untervektorräume $U, W \subseteq \mathbb{R}[t]$, so daß $\mathbb{R}[t] = U \oplus W$ und $U \cong \mathbb{R}[t] \cong W$ gilt.

Abgabetermin: Montag, 10. 5. 2010, 12hct im Übungskasten.