MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra II”

Aufgabe 5

(a) Man bestimme das Vorzeichen der folgenden Permutationen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Man stelle die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ als Produkt von Transpositionen dar.

(c) Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt ein (k-)Zyklus ($k \geq 1$), wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so daß $\pi(a_k) = a_1$, $\pi(a_i) = a_{i+1}$ für $1 \leq i < k$, und $\pi(x) = x$ für $x \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$. Man schreibt dann $\pi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. — Man beweise:

(i) Ist $1 < k < l$ und sind $a_1, \ldots, a_l \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden,
so gilt $\langle a_1, \ldots, a_l \rangle = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \circ \langle a_k, \ldots, a_l \rangle$.

(ii) Für jeden k-Zyklus π gilt $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{k-1}$.

Aufgabe 6

(a) Berechnen Sie die Determinaten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_n = \big(\max\{i, j\} \big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

(b) Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in K^{n \times n}$ Matrizen mit $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
Zeigen Sie, daß $\det(B) = \det(A)$.

Aufgabe 7

Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R$, wobei R ein kommutativer Ring mit 1.
Sei ferner $A_n = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ mit $a_{ii} := \beta_i$, $a_{i+1,i} := 1$, $a_{i,i+1} := -1$ und $a_{ij} := 0$ sonst.
Man zeige für $n \geq 3$ die Rekursionsformel $\det(A_n) = \beta_n \cdot \det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2})$.

Aufgabe 8

Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Die Spur $\operatorname{tr}(B)$ einer Matrix $B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$ ist definiert als die Summe ihrer Diagonaleinträge, d.h. $\operatorname{tr}(B) := \sum_{i=1}^n b_{ii}$.
Für $A \in R^{n \times n}$ mit den Spalten $a_1, \ldots, a_n \in R^n$ beweise man die Formel
$\sum_{i=1}^n \det(a_1 \ \ldots \ a_{i-1} \ \ Ba_i \ \ a_{i+1} \ \ldots \ a_n) = \operatorname{tr}(B) \cdot \det(A)$.

Abgabetermin: Montag, 3. 5. 2010, 12hct im Übungskasten.