MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 41

Sei K ein Körper und $n \geq 1$.

(a) Nach Satz 9.12 gilt für alle $\alpha_0, ..., \alpha_m \in K$: $\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^m \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^m \end{pmatrix} = \prod_{i<j\leq m} (\alpha_j - \alpha_i).$

Man beweise:
Sind $x_0, \dots, x_m \in K$ paarweise verschieden und $b_0, \dots, b_m \in K$ beliebig,
so existiert ein Polynom $p \in K[t]$ mit $\deg(p) \leq m$ und $p(x_j) = b_j$ für $j = 0, \dots, m$

(b) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ und sei A diagonalisierbar mit $\dim(\mathrm{Eig}(A;\lambda)) \leq 1$ für alle $\lambda \in K$.

Man beweise:

$AB = BA \implies$ es gibt ein Polynom $p \in K[t]$ mit $\deg(p) \leq n-1$ und $B = p(A)$.

[Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall, daß A eine Diagonalmatrix ist.]

Aufgabe 42

Man zeige, daß die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ trigonalisierbar ist, und bestimme $S \in \mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ derart, daß $S^{-1}AS$ obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 43

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V und $f \in \mathsf{End}(V)$ mit $f(U) \subseteq U$.

Man beweise:

(a) Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von f,
so gilt: $v_1 + \ldots + v_k \in U \implies v_1, \dots, v_k \in U$. [Hinweis: Beweis von Satz 11.2a]

(b) Ist f diagonalisierbar, so ist auch $f|U \in \mathsf{End}(U)$ diagonalisierbar.

Aufgabe 44

Sei K ein Körper und $(R, +, \otimes, \odot)$ eine K-Algebra.

Man beweise $(p{\cdot}q)(r) = p(r) \otimes q(r)$ und $(\lambda{\cdot}p)(r) = \lambda \odot p(r)$ für alle $p, q \in K[t]$, $\lambda \in K$ und $r \in R$.

Abgabetermin: Montag, 12. 7. 2010, 12hct im Übungskasten.