MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"

Aufgabe 1

Sei K ein Körper mit Charakteristik $\neq 2$ (d.h. $1+1 \neq 0$),
und seien M, M' affine Unterräume des K-Vektorraums V.

Man zeige: Ist $M \cup M'$ affiner Unterraum von V, so $M \subseteq M'$ oder $M' \subseteq M$.

Aufgabe 2

Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_0, ..., v_k \in V$.
Sei $U := \mathrm{span}(v_0, ..., v_k)$ und sei M der von $v_0, ..., v_k$ aufgespannte affine Unterraum.

Man zeige: $\dim(M) = \begin{cases} \dim(U) & \text{falls } 0 \in M \\ \dim(U) - 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 3

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des K-Vektorraums V und sei $\pi_i : V \to V/U_i$, $x \mapsto x + U_i$ $(i = 1, 2)$. Sei ferner $\pi : V \to V/U_1 \times V/U_2$, $\pi(x) := (\pi_1(x), \pi_2(x))$, wobei $V/U_1 \times V/U_2$ der mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation versehene K-Vektorraum sei.

Man beweise:

(i) π ist linear.

(ii) π injektiv $\Leftrightarrow$ $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

(iii) π surjektiv $\Leftrightarrow$ $V = U_1 + U_2$.

Aufgabe 4

Es seien U, U' Untervektorräume des K-Vektorraums V.

(a) Sei $\rho : U \to (U + U')/U'$, $\rho(x) := x + U'$.

Man zeige: (i) $\mathrm{Ker}(\rho) = U \cap U'$ und (ii) $U/(U \cap U') \cong (U + U')/U'$.

(b) Gelte $U \subseteq U'$. Dann ist U'/U ein Untervektorraum von V/U. Man beweise:

(i) Es gibt ein $f \in \mathrm{Hom}(V/U, V/U')$ mit $\forall x \in V(f(x + U) = x + U')$ und $\mathrm{Ker}(f) = U'/U$.

(ii) $(V/U)/(U'/U) \cong V/U'$.

Abgabetermin: Montag, 26. 4. 2010, 12hct im Übungskasten.