Klausur zur Vorlesung "Lineare Algebra II" im SoSe 2006 (Dozent: Dr. P. Schuster)

Aufgabe 1.

Für $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sei $A = ab^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Bestimmen Sie zunächst den Rang und dann die Eigenwerte von A.

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Bestimmen Sie die Determinante $\det A$, das charakteristische Polynom P_A, sowie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Für welche Werte von a ist A invertierbar bzw. diagonalisierbar?

Aufgabe 3.

Es sei K ein Körper und $V = K^{n\times n}$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen. Für festes $A, B \in V$ sei die Abbildung $F \in \mathsf{End}(V)$ durch $F(M) := AMB^{\mathtt{t}}$ $(M \in V)$ definiert.

Zeigen Sie: Falls λ Eigenwert von A ist und μ Eigenwert von B ist, so ist $\lambda \cdot \mu$ Eigenwert von F.

Aufgabe 4.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^{\mathtt{t}} = -A$. Ferner sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, daß $\langle Ax, x \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, und daß $E_n + A$ sowie $E_n - A$ invertierbar sind.

Aufgabe 5.

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f \in \mathsf{End}(V)$ selbstadjungiert und nilpotent.
Zeigen Sie, daß $f = 0$ gilt.

Aufgabe 6.

(a) Beweisen Sie die Parallelogramm-Gleichung für euklidische Vektorräume:
$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, so daß $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dabei sei $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.