MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Buchholz

SoSe 2009
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung "Diskrete Strukturen"

Probeklausur

(Bearbeitungszeit: 135 Minuten)

Aufgabe P1

Man beweise durch vollständige Induktion: $\binom{n}{4} = \sum_{k=1}^{n-3} \binom{n-k}{3}$, falls $n \geq 4$. (4 Punkte)

Aufgabe P2

Man berechne den größten gemeinsamen Teiler von 2008 und 850
und bestimme $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathsf{ggT}(2008, 850) = x \cdot 2008 + y \cdot 850$. (4 Punkte)

Aufgabe P3

Man bestimme $n < 1500$, so daß $n \equiv 1 \mathtt{~mod~} 9$ & $n \equiv 10 \mathtt{~mod~} 11$ & $n \equiv 6 \mathtt{~mod~} 14$. (4 Punkte)

Aufgabe P4

Man beweise:
(a) $m, k \geq 1$ & $a^k \equiv 1 \mathtt{~mod~} m \implies \mathsf{ggT}(a, m) = 1$. (2 Punkte)
(b) Ist $n > 3$ und $n{+}1$ keine Primzahl, so $n! \equiv 0 \mathtt{~mod~} (n{+}1)$. (4 Punkte)

Aufgabe P5

Sei M eine Menge und R eine reflexive und transitive Relation auf M.

Definition. Für $x, y \in M$ sei: $x \sim y :\Leftrightarrow xRy$ & yRx und $xR^+y :\Leftrightarrow xRy$ & nicht(yRx).

(a) Man zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist. (1 Punkt)

(b) Sei $M_\sim := \{[x]_\sim : x \in M\}$ und $\prec := \{(\alpha, \beta) \in M_\sim \times M_\sim : \exists x \in \alpha \exists y \in \beta\, (xR^+y)\}$.

Man beweise, daß $\prec$ transitiv ist. (5 Punkte)

Aufgabe P6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Für eine korrekte Antwort erhalten Sie jeweils einen Punkt, für eine inkorrekte Antwort wird jeweils ein Punkt abgezogen. Punktezahl für diese Aufgabe ist das Maximum aus 0 und der tatsächlich von Ihnen erreichten Punktzahl.

(1) Ist X eine endliche Menge und $f\colon X \to X$ injektiv, so ist f bijektiv.

(2) Jede surjektive Abbildung ist injektiv.

(3) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ gilt $\mathsf{ggT}(a, b) \mid d$.

(4) Für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(m_1 \cdot m_2) = \varphi(m_1) \cdot \varphi(m_2)$. (Dabei sei φ die Euler-Funktion.)

(5) Ist $\{b_1, \ldots, b_k\}$ ein primes Restsystem modulo m, so auch $\{ab_1, \ldots, ab_k\}$ für jedes $a \in \mathbb{N}_1$.

(6) $\{11, 55\}$ ist primes Restsystem modulo 6.

Abgabe: Dienstag 23. 6. 2009, 18 Uhr (Übungskasten)