MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Buchholz

SoSe 2009
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung "Diskrete Strukturen"

Bemerkung. Nach Lemma 3.3 gilt: $\mathsf{ggT}(a_0, ..., a_n) = 1 \ \Leftrightarrow\ 1 \in \mathbb{Z}a_0 + \ldots + \mathbb{Z}a_n$.

Aufgabe 17

Man beweise:

(a) $a|bc$ & $\mathsf{ggT}(a,b) = 1 \implies a|c$

(b) $\mathsf{ggT}(a_0, b) = \ldots = \mathsf{ggT}(a_n, b) = 1 \implies \mathsf{ggT}(a_0 \cdot \ldots \cdot a_n, b) = 1$.

(c) $a_i|b$ für $i = 0, ..., n$ und $\mathsf{ggT}(a_i, a_j) = 1$ für alle $i, j \in \{0, ..., n\}$ mit $i \neq j \implies a_0 \cdot \ldots \cdot a_n|b$.

Aufgabe 18

(a) Man beweise: $\mathsf{ggT}(a_0, ..., a_n) = \mathsf{ggT}(\mathsf{ggT}(a_0, ..., a_{n-1}), a_n)$ $(n \geq 1)$.

(b) Man berechne $\mathsf{ggT}(7469, 2464, 4515, 2639)$.

(c) Man bestimme $x, y \in \mathbb{Z}$, so daß $\mathsf{ggT}(632, 547) = 632x + 547y$.

(d) Man beweise: Für alle $n \geq 1$ ist $\mathsf{ggT}((n{+}1)! + 1, n! + 1) = 1$.

Definition

$\mathbb{P} := \{n \in \mathbb{N} : 2 \leq n \ \&\ \neg\exists m, k < n(n = mk)\}$ (Menge aller *Primzahlen*)

Für $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei $v_p(a) := \max\{m \in \mathbb{N} : p^m|a\}$

Aufgabe 19

Man beweise: Für alle $a_0, ..., a_k \in \mathbb{Z}$, $n_0, ..., n_k \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt

(a) $a \in \mathbb{N}$ & $a|p \implies a = 1$ oder $a = p$.

(b) $p|a_0 \cdot \ldots \cdot a_k \implies \exists i \leq k(p|a_i)$.

(c) Ist $a = p_0^{n_0} \cdots p_k^{n_k}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_0, ..., p_k$, so gilt:

$$v_p(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \notin \{p_0, ..., p_k\} \\ n_i & \text{falls } p = p_i \in \{p_0, ..., p_k\} \end{cases}.$$

Aufgabe 20

Man beweise: Für alle $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt

(a) $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$.

(b) $a|b \iff \forall p \in \mathbb{P}(\, v_p(a) \leq v_p(b)\,)$.

(c) $v_p(\mathsf{ggT}(a, b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

Abgabe: Dienstag, 26. 5. 2009, 18 Uhr (Übungskasten)