MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Buchholz

SoSe 2009
Blatt 4

## Übungen zur Vorlesung "Diskrete Strukturen"

### Aufgabe 13

Sei $M = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 100\}$ und $A \subseteq M$.

(a) Man beweise: Ist $|A| = 55$, so gibt es Zahlen $a, b \in A$ mit $a - b = 9$.

Hinweis: Man betrachte die Abbildung $M \ni x \mapsto x + 9$.

(b) Wie ist die Situation, falls $|A| = 54$ ?

### Aufgabe 14

Man beweise:

(a) $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (k \leq n)$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 0$ [Hinweis: Beweis ohne Induktion möglich.]

### Aufgabe 15

Sei $n \geq 1$ und $M = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 2n\}$.

Man beweise: Es gibt genau $\frac{1}{2}(2^{2n} - \binom{2n}{n})$ Teilmengen $X \subseteq M$ mit $|X| > n$.

Hinweis: Man betrachte auch die Teilmengen $X \subseteq M$ mit $|X| < n$.

### Aufgabe 16

Man zeige, daß für alle $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

(a) $c|b \,\&\, b|a \;\Rightarrow\; c|a$

(b) $c|a \,\&\, c|b \;\Rightarrow\; c|xa + yb$

(c) $c \neq 0 \;\Rightarrow\; (b|a \;\Leftrightarrow\; bc|ac)$

(d) $b|a \;\Leftrightarrow\; -b|a \;\Leftrightarrow\; b|-a$

(e) $a|0$ und $1|a$

(f) $(0|a \Leftrightarrow a = 0)$ und $(a|1 \Leftrightarrow a \in \{-1, 1\})$

(g) $b|a \,\&\, 1 \leq a \;\Rightarrow\; b \leq a$

(h) $b|a \;\&\; a \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 \leq |b| \leq |a|$

(i) $b|a \,\&\, a|b \;\Rightarrow\; |a| = |b|$

(j) $\forall k \geq 1 (k|a \Leftrightarrow k|b) \;\Rightarrow\; |a| = |b|$

[Für $x \in \mathbb{R}$ (also insbesondere für $x \in \mathbb{Z}$) bezeichnet $|x|$ den *Absolutbetrag* von $x$.]

**Abgabe:** Dienstag, 19. 5. 2009, 18 Uhr (Übungskasten)